



## ÚNAVOVÁ ŽIVOTNOST KONSTRUKCÍ PŘI VÍCEOSÉM NEPROPORCIONÁLNÍM ZATĚŽOVÁNÍ

Jaroslav Svoboda, Miroslav Balda, Vladislav Fröhlich\*

**Abstract:** *Fatigue life of structures under multiaxial non-propagational loading.* The contribution presents a new approach to the estimation of fatigue lives of structures loaded by multiaxial nonproportional harmonic loading. The approach comes out of exponential expressions for fatigue curves under multiaxial stress. It enables to evaluate fatigue lives out of the known S-N curves valid for uniaxial loading. The evolution uses amplitudes of damaging stress, which has been formulated earlier.

**Key words:** *fatigue life, S-N curve, damaging stress.*

### 1. ÚVOD

Stanovení životnosti konstrukčních uzlů zatěžovaných víceosým neproporcionálním dynamickým zatížením patří z hlediska výpočtářského k nejnáročnějším úkolům v oblasti únavy materiálů. Podle tvaru mohou mít působící neproporcionální procesy charakter harmonický s fázovým posuvem, nebo náhodný, který lze popsat základními statistickými charakteristikami, z nichž k nejdůležitějším lze zařadit směrodatnou odchylku  $s_x$  a výkonovou spektrální hustotu  $S_{xx}(f)$ . Prvá charakteristika podává informaci o mohutnosti působících procesů z hlediska úrovně napětí, druhá informaci o frekvencích, které se v těchto procesech vyskytují. Znalost těchto dvou charakteristik je sice důležitá, není však rozhodující pro provedení spolehlivého výpočtu. K tomu jsou potřebné ještě informace o pevnostních vlastnostech materiálu sledovaných konstrukčních uzlů, o technologii jejich výroby a rovněž o vlivu prostředí, v němž bude konstrukce provozována.

Informaci o úrovni a charakteru zatížení získáme obvykle buď výpočtem, nebo nejčastěji tenzometrickým měřením na prototypu konstrukce přímo v provozu. Podklady k hodnocení pevnostních vlastností materiálů nám poskytují únavové zkoušky prováděné na vzorcích z daného materiálu v oblasti vysokocyklové a nízkocyklové únavy, případně zkoušky lomové houževnatosti prováděné při odpovídající teplotě. Využitím výsledků těchto zkoušek pro odhad životnosti jsme se zabývali v pracích [1], [2], [3] a [4] řešeného grantu GAČR č. 101/02/0043. V tomto příspěvku chceme uvést některé praktické poznatky které byly získány z provedených experimentálních prací a které lze výhodně využít při odhadu únavové životnosti.

### 2. ROZBOR PROBLEMATIKY

Zkouškami prováděnými na hladkých a vrubovaných vzorcích kruhového průřezu zatěžovaných kombinovaným harmonickým zatížením tah-tlak – krut s fázovým posuvem  $\varphi = \pi/2$  a na trubkových vzorcích zatěžovaných kombinovaným náhodným

\* Ing. Jaroslav Svoboda, Prof. Ing. Miroslav Balda, DrSc., Bc. Vladislav Fröhlich, Ústav termomechaniky AVČR, Centrum diagnostiky materiálu, Veleslavínova 11, 301 14 Plzeň, tel.: 377236415, fax: 377220787, e-mail: [svoboda@cdm.it.cas.cz](mailto:svoboda@cdm.it.cas.cz), [balda@cdm.it.cas.cz](mailto:balda@cdm.it.cas.cz), [frohlich@cdm.it.cas.cz](mailto:frohlich@cdm.it.cas.cz)

zatížením bylo zjištěno, že rovněž u neproporcionálního víceosého namáhání lze závislost mezi výslednou životností a napětím ( v případě náhodných procesů je výhodné pracovat se směrodatnou odchylkou  $s$  ) vyjádřit exponenciální rovnicí ve tvaru

$$N = C s_d^B \quad \text{pro kombinované harmonické zatěžování s fázovým posuvem,} \quad (1)$$

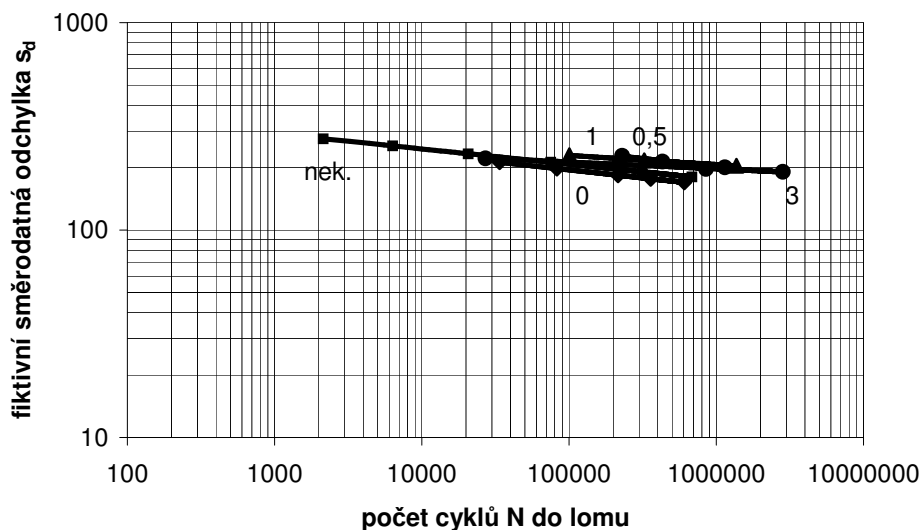
případně

$$N_b = C s_d^B \quad \text{pro kombinované náhodné zatěžování.} \quad (2)$$

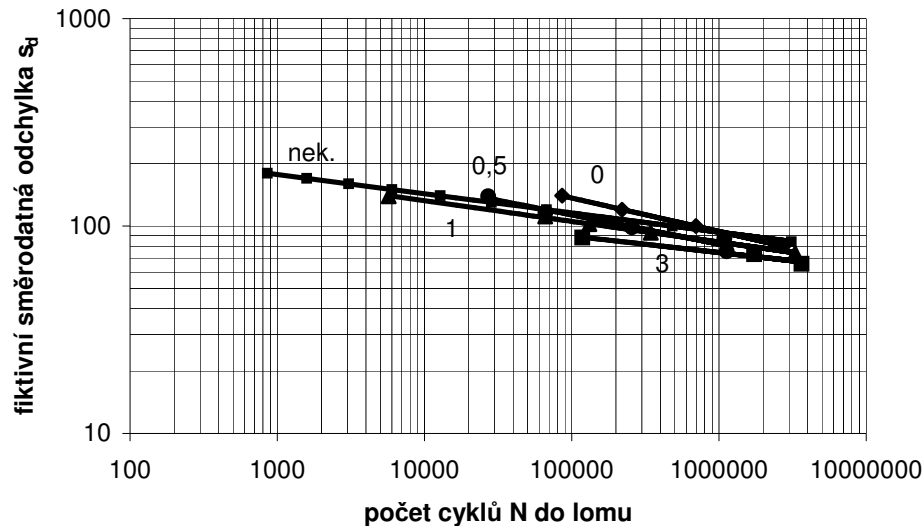
Hodnota  $s_d$  je tzv. fiktivní směrodatná odchylka která byla odvozena v [1] ze směrodatných odchylek  $s_\sigma$  amplitud normálových napětí  $\sigma_a(t)$  od tahu-tlaku a  $s_\tau$  amplitud smykových napětí  $\tau_a(t)$  od krutu v následujícím tvaru

$$s_d = \sqrt{s_\sigma^2 + (k_c s_\tau)^2} . \quad (3)$$

Konstanta  $k_c = \sigma_c / \tau_c$  pro hladké vzorky a  $k_c = \sigma_c^* / \tau_c^*$  pro vrubované vzorky udává poměr mezních napětí odpovídajících zatížení tahu-tlaku a krutu. Hodnota  $s_d$  nám podává informaci o úrovni nominálních napětí obou zatěžovacích procesů a to jak harmonického, tak i náhodného charakteru a konstanty  $C$  a  $B$  zahrnují vlastnosti materiálu a jak bude ukázáno dále, rovněž podíl normálových a smykových napětí na výsledné životnosti. Z obr.1 a 2 je totiž zřejmé, že tyto konstanty jsou závislé na poměru  $\kappa = s_\tau / s_\sigma$  směrodatných odchylek obou zatěžovacích procesů  $\sigma_a(t)$  a  $\tau_a(t)$ . Experimentálně byly závislosti (1) stanoveny pro hladké kruhové vzorky o průměru 15 mm a pro vzorky vrubované obvodovou půlkruhovou drážkou hloubky 1 mm a šířky 2 mm, pro různé poměry  $\kappa = 0; 0,5; 1; 3$  a  $\infty$ . Vzorky byly vyrobeny z materiálu 11523.1. Tyto závislosti jsou vyneseny v logaritmických souřadnicích na obr. 1 a 2.



Obr.1 Závislost  $N - s_d$  pro kombinované neproporcionální harmonické zatížení ( hladké vzorky )



Obr.2 Závislost  $N - s_d$  pro kombinované neproporcionální harmonické zatížení ( vzorky s obvodovou drážkou )

Z rovnic regresních křivek byly pro jednotlivé zkušební vzorky získány hodnoty konstant  $C$  a  $B$  pro různé poměry  $\kappa = s_\tau / s_\sigma$  obou zatěžovacích procesů. Tyto hodnoty jsou uvedeny pro vzorky zatěžované harmonickým namáháním s fázovým posuvem  $\varphi = \pi/2$  v tab. 1.

Tab.1 Konstanty  $C$  a  $B$  pro zkoušené vzorky

$\kappa$	Vzorky hladké		Vzorky s drážkou	
	$C$	$B$	$C$	$B$
0	$4,5784 \cdot 10^{34}$	- 12,9512	$1,7214 \cdot 10^{18}$	- 6,1989
0,5	$5,1094 \cdot 10^{34}$	- 12,4586	$8,1527 \cdot 10^{18}$	- 6,7654
1	$2,5818 \cdot 10^{57}$	- 22,2073	$1,9148 \cdot 10^{25}$	- 10,0285
3	$1,0372 \cdot 10^{75}$	- 30,0624	$7,1647 \cdot 10^{28}$	- 12,2082
$\infty$	$2,8419 \cdot 10^{36}$	- 13,5722	$1,7521 \cdot 10^{27}$	- 10,7804

Z tabulky je zřejmé, že se tyto konstanty exponenciálních křivek u jednotlivých vzorků významně liší. Jsou závislé na materiálu a technologii výroby, ale rovněž na hodnotách  $\kappa$ , tedy na poměru směrodatných odchylek  $s_\tau$  a  $s_\sigma$  obou zatěžovacích procesů a rovněž na úrovni jejich smykových a normálových napětí.

### 3. STANOVENÍ PODÍLU SMYKOVÉHO NAPĚTÍ NA CELKOVÉ ŽIVOTNOSTI

Z tab.1 vyplývá, že hodnoty konstant  $C$  i  $B$  narůstají se zvyšujícím se poměrem  $\kappa$ . Jsou tedy závislé na velikosti smykového napětí od přídatného krutu. Za předpokladu, že vlastnosti materiálu a technologie ovlivní tyto konstanty stejně, pak z rozdílu životností  $N$  případně  $N_b$ , vypočítaných na základě vztahů (1) a (2) pro stejné hodnoty normálového napětí ( $s_d = \text{konst.}$ ), ale různé hodnoty  $\kappa = s_\tau / s_\sigma$ , lze stanovit, jakým způsobem ovlivňuje smykové napětí od krutu celkovou životnost při různých poměrech  $\kappa$  a rovněž při různých způsobech zatěžování. Zvolili jsme proto pro každý druh vzorků dvě odlišné úrovně normálového napětí a měnili při výpočtu životnosti pomocí vztahů (1) a (3) pouze amplitudu smykového napětí tak, abychom dodrželi příslušné poměry  $\kappa$ , pro které jsme z experimentů znali konstanty  $C$  a  $B$  (viz tab.1). Výsledky jsou zřejmé z tab.2.

Tab.2 Vliv smykového napětí na životnost sledovaných vzorků

	$\kappa$	0	0,5	1	3	$\infty$
Vzorky hladké	$s_\sigma$	198	198	198	198	0
	$s_\tau$	0	99	198	594	198
	$s_d$	198	247,5	356,9	812,7	297
	$N$	82441	77228	4,7	0	781
	$s_\sigma$	176,8	176,8	176,8	176,8	0
	$s_\tau$	0	88,4	176,8	530,4	176,8
	$s_d$	176,8	221	318,7	814,9	265,2
	$N$	357373	316967	65,9	0	3634
Vzorky s drážkou	$s_\sigma$	140	140	140	140	0
	$s_\tau$	0	70	140	420	140
	$s_d$	140	152	183,7	383,5	119
	$N$	85556	14137	377	0	73849
	$s_\sigma$	120	120	120	120	0
	$s_\tau$	0	60	120	360	120
	$s_d$	120	130,4	157,5	328,7	102
	$N$	222457	39876	1765	0	389094

Z tabulky je vidět, že životnost  $N$  s rostoucí hodnotou smykového napětí klesá. Při poměru  $\kappa = 1$  jsou tyto hodnoty v závislosti na úrovni amplitudy normálového napětí  $\sigma_a$  ( a rovněž  $s_\sigma$  ) velmi malé, a při poměru  $\kappa > 1$  prakticky nulové. Zajímavý je odlišný vliv přídavného smykového napětí v případě hladkých a vrubovaných vzorků. Zatím co u vrubovaných vzorků se vliv smykového napětí projevuje významně již od hodnot  $\kappa > 0$ , u hladkých vzorků se začíná uplatňovat teprve při hodnotách vyšších než  $\kappa = 0,5$ .

V tabulce uvedené životnosti pro sledované poměry  $\kappa$  odpovídají hodnotám fiktivní směrodatné odchylky  $s_d$ , které se vzájemně liší. Abychom mohli exaktně porovnat jednotlivé životnosti mezi sebou, bylo by nutné provést ještě jejich přepočtení na stejnou hodnotu  $s_d$ .

Životnosti  $N$  v prvním sloupci pro  $\kappa = 0$  odpovídají životnostem, které jsme vypočítali ze vztahu (1). Označme je jako  $N_1$ . Označíme-li stejným indexem rovněž odpovídající konstanty  $C$  a  $B$ , obdržíme pro výpočet životnosti při jednoosém zatěžování ( při  $\kappa = 0$  ) vztah

$$N_1 = C_1 s_{d1}^{B_1}. \quad (4)$$

Tyto konstanty lze stanovit z logaritmického vyjádření únavové křivky pro tah-tlak ve tvaru

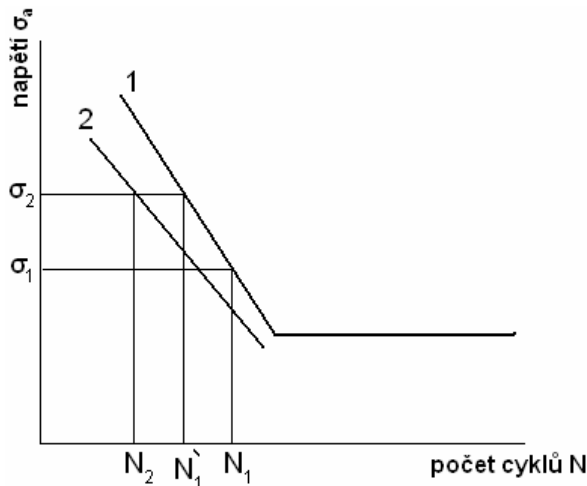
$$\log N_1 = A_1 + B_1 \log \sigma_a. \quad (5)$$

Konstanty  $B_1$  jsou v obou rovnicích (4) a (5) shodné a udávají sklon šikmé větve únavové křivky, označovaný obvykle jako exponent  $w$ , druhá konstanta  $C_1$  případně  $A_1$  ( v logaritmickém vyjádření ) stanoví posunutí této křivky.

Poněvadž podle předpokladu je již v konstantách  $C_1$  a  $B_1$  zahrnut vliv materiálu případně technologie, musí být rozdíl konstant  $C$  a  $B$  při kombinovaném zatížení (  $\kappa > 0$  ) způsoben účinkem přídavného smykového napětí, které ovlivňuje velikost hlavních napětí

$\sigma_1$  a  $\sigma_2$  a úhel rovin, v nichž působí. Jestliže je snížení životností při kombinovaném zatěžování skutečně pouze záležitostí napjatosti, musí existovat způsob, který umožní přepočítat životnosti z jednoosého namáhání na víceosé a naopak. Prakticky půjde tedy o přepočet šikmé větve únavové křivky vyjádřené exponenciální závislostí (1), s konstantami  $C_1$  a  $B_1$  na exponenciální závislosti s konstantami  $C$  a  $B$ , které spolu s fiktivní směrodatnou odchylkou  $s_d$  (3) budou charakterizovat konkrétní způsob namáhání.

Sledujme nyní následující obr.3. Jsou na něm zobrazeny únavová křivka 1 pro jednoosé namáhání, kterou lze popsat rovnicí  $N_1 = C_1 s_{d1}^{B_1}$  a únavová křivka 2 pro kombinované namáhání, pro níž platí vztah  $N_2 = C_2 s_{d2}^{B_2}$ .



Obr.3 Schema únavových křivek pro jednoosé a kombinované namáhání

Směrodatné odchylce  $s_{d1}$  pro napětí  $\sigma_1$  odpovídá na únavové křivce 1 jednoosého namáhání životnost  $N_1$ . Přistoupí-li nyní smykové napětí od krutu, zvýší se tato hodnota podle vztahu (3) na  $s_{d2}$  již odpovídá napětí  $\sigma_2$  s životnostmi  $N_1'$  a  $N_2$ . Rozdíl  $N_1' - N_2$  na křivkách (1) a (2) představuje snížení v důsledku tohoto smykového napětí. Uvedené skutečnosti však dosud neřeší záležitost nalézt vazbu mezi životnostmi  $N_1'$  a  $N_2$  aby bylo možné stanovit konstanty exponenciální křivky libovolného neproporcionálního kombinovaného harmonického zatížení ( $\kappa > 0$ ) na základě znalosti únavové křivky pro  $\kappa = 0$ . To nám umožní teprve aplikace vztahu pro tzv. modul poškozujícího napětí  $\sigma_d$ , který byl odvozen v [1] ve tvaru

$$|\sigma_d| = \sqrt{\sigma^2 + (k_c \tau)^2}, \quad (6)$$

kde  $\sigma$  a  $\tau$  jsou amplitudy napětí daného kombinovaného namáhání a  $k_c$  konstanta stanovená jako poměr mezních napětí pro jednoosý tah-tlak a krut ( viz kapitola 1 ). Problém je však ještě v tom, že poloha únavových křivek pro kombinované zatěžování není vůči křivce pro jednoosé zatěžování jednoznačně stanovena. Dokumentují to obrázky č. 1 a 2, kde se tyto křivky pro hladké vzorky nachází vpravo od křivky pro  $\kappa = 0$ , zatím co pro vzorky vrubované vlevo. Souvisí to s velikostí hodnoty  $k_c$ , která udává poměr mezních napětí pro tah-tlak a krut. Jestliže je  $k_c < 0$  ( $\sigma_c < \tau_c$ ), budou se tyto křivky nacházet vlevo a naopak.

V případě našich zkušebních vzorků vyrobených z materiálu 11523.1 byly experimentálně zjištěny následující hodnoty mezí únavy uvedené v [5]:

- pro hladké kruhové vzorky namáhané tahem-tlakem ( $R = -1$ ) .....  $\sigma_c = 240 \text{ MPa}$ ,

- pro hladké kruhové vzorky namáhané krutem ( $R = -1$ ) .....  $\tau_c = 160 \text{ MPa}$ ,
- pro vzorky s drážkou namáhané tahem-tlakem ( $R = -1$ ) .....  $\sigma_c^* = 110 \text{ MPa}$ ,
- pro vzorky s drážkou namáhané krutem ( $R = -1$ ) .....  $\tau_c^* = 130 \text{ MPa}$ .

Za předpokladu, že existuje závislost mezi poměrem životností  $N_2$  a  $N_1$  a poměrem maximálních amplitud funkce modulů poškozujících napětí  $\sigma_{d2}$  a  $\sigma_{d21}$ , lze vyjádřit tuto závislost následujícím vztahem

$$\frac{N_2}{N_1} = k_N \left( \frac{\sigma_{d21}}{\sigma_{d2}} \right)^a \quad (7)$$

V uvedeném vzorci je  $k_N$  konstanta, kterou lze na základě provedených experimentů zvolit pro hladké vzorky  $k_N = 2$ , pro vzorky vrubované s obvodovou drážkou  $k_N = 1$ . Exponent  $a$  nám zohledňuje polohu únavových křivek pro kombinované zatěžování vůči únavové křivce pro zatěžování jednoosým tahem-tlakem. Je roven 1 a liší se pouze znaménkem. Pro  $k_c > 0$  bude  $a = 1$ , pro  $k_c < 0$   $a = -1$ . Hodnoty  $\sigma_{d21}$  a  $\sigma_{d2}$  v rovnici (7) jsou maximální amplitudy funkce modulu poškozujícího napětí  $\sigma_d$  – viz (6). Pro bod na křivce životnosti 1 pro jednoosé namáhání je  $\sigma_{d21} = \sigma_2$ . Hodnotu  $\sigma_{d2}$  stanovíme pro kombinované harmonické zatížení s fázovým posuvem  $\varphi$  ze vztahu

$$\sigma_{d2} = \frac{\sigma_{d2\max} - \sigma_{d2\min}}{2} \quad (8)$$

extrémů funkce poškozujícího napětí

$$\sigma_{d2} = \sigma_2 \sqrt{\sin^2 \omega t + k_c^2 \kappa^2 \sin^2(\omega t + \varphi)}. \quad (9)$$

V tab.3 jsou uvedeny výsledky aplikace vztahu (7) na výpočet životností  $N_2$  pro případ hladkých a vrubovaných vzorků namáhaných kombinací tah-tlak – krut zatěžovaných harmonicky s fázovým posunutím obou složek o hodnotu  $\varphi = \pi/2$ . Výpočet byl proveden pro poměr  $\kappa = 0,5$  a osm různých úrovní napětí.

Tab.3 Porovnání vypočítaných životností v cyklech s experimenty

	Hladina napětí $\sigma$ [MPa]	Jednoosé zatěžování $\kappa = 0$	Kombinované zatěžování $\kappa = 0,5$	
		Experiment	Experiment	Výpočet
Vzorky hladké	250	357373	316610	317776
	260	216133	192552	189504
	270	132294	121878	117808
	280	82441	77228	73312
Vzorky s drážkou	120	1900099	414494	326505
	130	1162747	242447	199752
	140	733058	146588	125970
	150	472172	91772	82019

#### 4. MEZNÍ NAPĚTÍ PŘI KOMBINOVANÉM NAMÁHÁNÍ

Podobně jako v případě jednoosého namáhání, lze rovněž u kombinovaného namáhání stanovit mezní hodnoty napětí (nebo lépe mezní hodnoty směrodatných odchylek normálového a smykového napětí), použijeme-li vztahy (1), případně (2), které udávají závislost mezi životností  $N$  a  $N_b$  a  $s_d$ . Dosadíme-li za hodnotu  $s_d$  výraz (3), obdržíme rovnici ve tvaru

$$N = C \left( \sqrt{s_\sigma^2 + (k_c s_\tau)^2} \right)^B, \quad (10)$$

kteřá udává závislost mezi hodnotami  $N$ ,  $s_\sigma$  a  $s_\tau$  pro zvolené poměry  $\kappa$ . Pro každý poměr  $\kappa$  budou různé konstanty  $C$  a  $B$ .

Tuto rovnici lze dále upravit, dosadíme-li za  $s_\tau = \kappa s_\sigma$ . Obdržíme pak následující tvar

$$N = C \left( \sqrt{s_\sigma^2 (1 + k_c^2 \kappa^2)} \right)^B. \quad (11)$$

V tomto výrazu je  $k_c = \sigma_c / \tau_c$  pro hladké vzorky nebo  $k_c = \sigma_c^* / \tau_c^*$  pro vzorky vrubované. Konstanty  $C$  a  $B$  závisí na materiálu a na hodnotě  $\kappa$ .

Meznímu napětí by měl v případě harmonického zatěžování odpovídat počet cyklů  $N = 10^7$ , v případě náhodného charakteru zatížení počet bloků  $N_b$ , odpovídající požadované době života. Pro tyto životnosti lze potom vypočítat pro případ kombinovaného zatížení tah-tlak - krut mezní hodnoty směrodatné odchylky normálových napětí ze vztahu

$$s_c = \left( \frac{N}{C} \right)^{\frac{1}{B}} \sqrt{\frac{1}{1 + k_c^2 \kappa^2}}. \quad (12)$$

Odpovídající mezní hodnoty směrodatné odchylky smykových napětí  $\tau$  pak vypočítáme z poměru  $\kappa$ .

Výpočet jsme aplikovali pro případ kombinovaného neproporcionálního harmonického zatížení hladkých kruhových vorků a vzorků s obvodovou drážkou. Výsledky jsou uvedeny v tab.4 a porovnány s experimenty. Ve všech případech byla získána poměrně dobrá shoda.

Tab.4 Mezní hodnoty  $s_c$ ,  $\sigma_c$  a  $\tau_c$  vypočítané dle vztahu (12) a porovnané s experimenty

$\kappa$	Mezní napětí [MPa]									
	Vzorky kruhové hladké					Vzorky kruhové s drážkou				
	Výpočet			Experiment		Výpočet			Experiment	
	$s_c$	$\sigma_c$	$\tau_c$	$\sigma_c$	$\tau_c$	$s_c$	$\sigma_c$	$\tau_c$	$\sigma_c$	$\tau_c$
0	136,7	193,3	-	240	-	70	100	-	110	-
0,5	134	189,5	94,75	219	109,5	53	75	37,5	< 98,3	< 49,2
1	103,3	146,1	146,1	140	140	50,8	71,8	71,8	< 80	< 80
3	39,7	56,1	168,3	54,8	164,4	22,6	32	96	34	102

Vztahu (12) bychom mohli použít rovněž pro výpočet mezního napětí v případě kombinovaného náhodného zatížení, kdybychom za hodnotu  $N$  dosadili životnost  $N_b$ , kterou chceme zaručit.

## 5. ZÁVĚR

V příspěvku je uveden nový přístup k výpočtu únavové životnosti u konstrukcí zatěžovaných neproporcionálním kombinovaným zatížením harmonického charakteru s libovolným fázovým posunutím jeho složek. Metoda vychází z předpokladu existence exponenciální závislosti mezi počtem cyklů  $N$  a tzv. fiktivní směrodatnou odchylkou  $s_d$  u všech kombinací zatížení. Jednotlivé exponenciální křivky se liší pouze svými konstantami  $C$  a  $B$ , na jejichž základě lze stanovit jejich polohu vůči únavové křivce pro jednoosé zatěžování. Pro přepočet životnosti je použita funkce modulu poškozujícího napětí, který definuje závislost mezi poškozováními od normálového a smykového napětí. To umožňuje zavedení konstanty  $k_c$  udávající poměr mezi hodnotami mezních napětí  $\sigma_c$  a  $\tau_c$  pro normálové a smykové napětí.

## Poděkování

Práce byla podpořena Grantovou agenturou ČR grantovým projektem č.101/02/0043 a výzkumným záměrem Ústavu termomechaniky AV ČR č. AVEZ 2076919.

## 6. LITERATURA

- [1] Balda M., Svoboda J., Fröhlich V.: *Using hypotheses for calculating fatigue lives of parts exposed to combined random loads*. Sb. Konference Inženýrská mechanika 2003 str. 16 ÷ 19, Svatka 2003, ISBN 80-86246-18-3.
- [2] Svoboda J., Balda M., Fröhlich V.: *Životnost a hypotézy při kombinovaném náhodném zatěžování*. Sb. konference Dynamika strojů 2003 str. 191 ÷ 198, Praha 2003, ISBN 80-85918-81-1.
- [3] Balda M., Svoboda J.: *Aplikace energetického kritéria pro výpočet životnosti konstrukcí namáhaných víceosým náhodným neproporcionálním zatížením*. Sb. konference Výpočtová mechanika 2003, 1. díl, str.23 ÷ 28, Nečtiny 2003, ISBN 80-7082-999-0.
- [4] Svoboda J., Balda M., Fröhlich V.: *Šíření trhlin u konstrukčních dílů namáhaných náhodným víceosým neproporcionálním zatížením*. Sb. konference Výpočtová mechanika 2003, 2. díl, str. 429 ÷ 436, Nečtiny 2003, ISBN 80-7082-999-0.
- [5] Kermes J.: *Únava ocelí při namáhání tah – krut se synchronizovanými složkami i s fázovým posunutím včetně koncentrátoru napětí*. Výzkumná zpráva 124 VP, ZČU, Plzeň 1994.
- [6] Papuga J., Růžička M., Balda M.: *Metody multiaxiální analýzy únavové životnosti*. Sborník příspěvků semináře Únava a lomová mechanika 2002 – Metodické a aplikační problémy. Škoda Výzkum 2002, díl 1., str. 1 ÷ 26.