

## POROVNÁNÍ PŘÍSTUPŮ K HODNOCENÍ ŠÍŘENÍ ÚNAVOVÝCH TRHLIN

J. Svoboda, M. Balda, V. Fröhlich<sup>1</sup>

**Abstract:** A COMPARISON OF APPROACHES TO ASSESSMENT OF FATIGUE CRACK PROPAGATION. The Paris formula has been used for an evaluation of a residual life of tube-form specimens with a lateral hole. Specimens were exposed to a combined random loads in tension-compression and torsion. It has been found that the constants  $C$  and  $n$  in the Paris formula depend not only on a material of the structure but also on a ratio of standard deviations of normal and shear stresses caused by the applied combined loading. Hence, it is necessary to determine those constants in forward. The calculations were done for 27 different variants of loading, and compared with experimental results. An influence of a choice of the mean crack-length is also discussed.

**Keywords:** Combined random load, residual life, crack propagation

### 1. ÚVOD

V příspěvku [1] na konferenci Computational Mechanics 2003 jsme se zabývali problematikou šíření únavových trhlin u konstrukčních dílů namáhaných náhodným víceosým neproporcionálním zatížením. Z výsledků experimentů prováděných na trubkových vzorcích s vnějším průměrem  $D=30\text{mm}$  a příčným otvorem  $d=3\text{mm}$ , vyrobených z materiálu ČSN 411523.1 vyplynulo, že rovněž v případě takto složitě zatěžovaných součástí lze pro oblast šíření dlouhých trhlin aplikovat Parisův vztah. Je však nutné provést jeho modifikaci, která zohlední jak specifikum daného zatížení, tak i změnu poměrů na čele trhliny. Pro výpočet rozkmitu efektivní hodnoty faktoru intenzity napětí  $\Delta K_c$  jsme proto použili vztah odvozený Chenem a Keerem [2], který umožnil zohlednit kombinaci módů I. a II. na čele trhliny při kombinaci zatížení tah-tlak – krut. Vzhledem k náhodnému charakteru zatížení jsme pro výpočet složek  $\Delta K_I$  a  $\Delta K_{II}$  dosadili směrodatné odchylky  $s_\sigma$  a  $s_\tau$  obou náhodných procesů.

V daném příspěvku se zaměříme na aplikaci výše zmíněného modifikovaného Parisova vztahu pro výpočet zbytkové životnosti u sledovaných trubkových vzorků zatěžovaných různými kombinacemi normálových a smykových napětí. Výsledky jsou porovnány s experimenty. Diskutován je různý přístup při stanovení délek trhlin v případě tzv. vnitřních vrubů, jakým je např. zmíněný příčný otvor v trubce. Ukázalo se, že volba způsobu stanovení délky trhlin ovlivňuje výsledek výpočtu poměrně značně, s ohledem na velký rozptyl experimentálních výsledků však nebylo možné žádný z aplikovaných způsobů upřednostnit.

<sup>1</sup> Ing. Jaroslav Svoboda, Prof. Ing. Miroslav Balda, DrSc.Feng., Bc. Vladislav Fröhlich, Ústav termomechaniky AVČR, Centrum diagnostiky materiálů, Veleslavínova 11, 301 14 Plzeň, svoboda@cdm.it.cas.cz, balda@cdm.it.cas.cz, fröhlich@cdm.it.cas.cz

## 2. ROZBOR PROBLEMATIKY

Pro šíření dlouhých trhlin u konstrukcí namáhaných víceosým náhodným zatížením byl v [1] odvozen modifikovaný Parisův vztah ve tvaru

$$\frac{da}{dN_b} = C \Delta K_{ef}^n, \quad (1)$$

kde

$\frac{da}{dN_b}$  ..... je rychlost šíření únavové trhliny vztažená k počtu zatěžovacích bloků

$\Delta K_{ef}$  ..... rozkmit efektivní hodnoty faktoru intenzity napětí vyjádřený vztahem uváděným Chenem a Keerem [2] ve tvaru

$$\Delta K_{ef} = \sqrt[3]{(\Delta K_{I.}^2 + 3\Delta K_{II.}^2)^3 (\Delta K_{I.}^2 + \Delta K_{II.}^2)}, \quad (2)$$

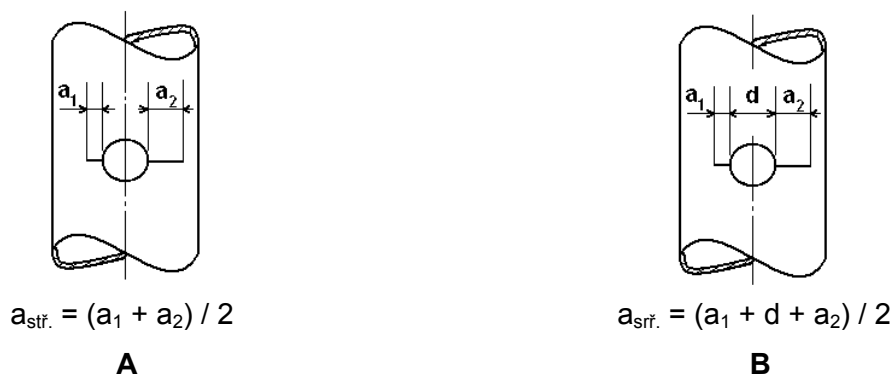
$$\Delta K_{I.} = s_\sigma \sqrt{\pi a}, \quad (3)$$

$$\Delta K_{II.} = s_\tau \sqrt{\pi a}. \quad (4)$$

Ve vztazích (3) a (4) byl rozkmit normálových a smykových napětí nahrazen směrodatnými odchylkami  $s_\sigma$  a  $s_\tau$  obou náhodných procesů. V prvním přiblížení byl v těchto dvou výrazech vzhledem ke komplikaci zanedbán vliv geometrického faktoru  $Y$ .

$a$  ..... délka trhliny.

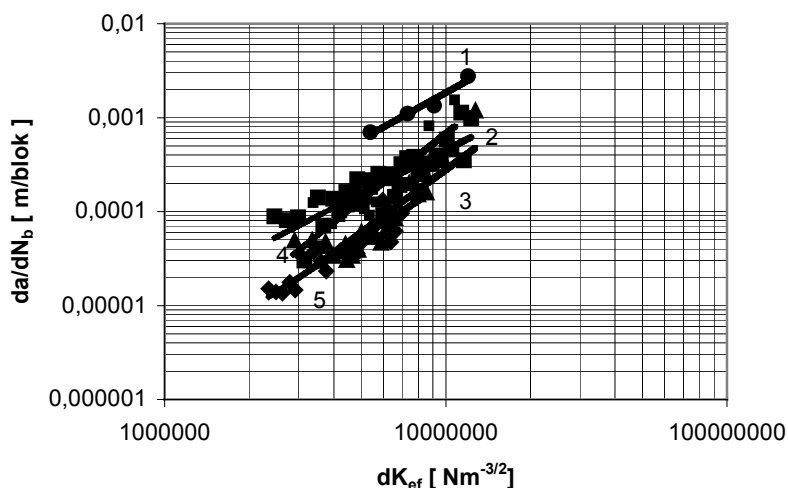
Závislost  $da/dN_b$  jako funkce  $\Delta K_{ef}$  byla pro sledované trubkové vzorky experimentálně stanovena pro 5 různých poměrů  $\kappa = s_\tau/s_\sigma = 0; 0,5; 1; 3$  a  $\infty$ . Na obr. 1 a 2 jsou tyto závislosti vyneseny pro dva různé způsoby stanovení střední hodnoty délky trhliny:



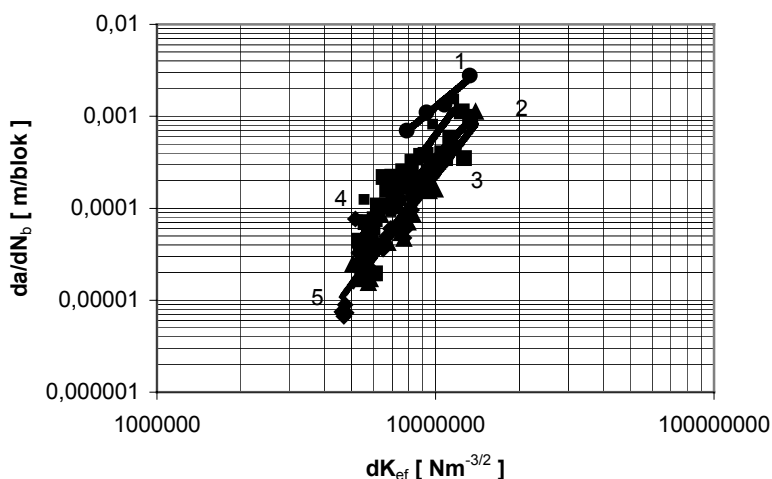
Průběhy na obr. 1 odpovídají případu **A**, průběhy na obr.2 případu **B**. Oba způsoby možného vyhodnocení uvádí Radaj [3] pro případ vnitřních vrubů.

Z obrázků vyplývá, že způsob stanovení délky trhliny  $a_{sř.}$  ovlivňuje hodnotu faktoru intenzity  $\Delta K_{ef}$  a tím i sklon exponenciálních křivek 1 ÷ 5. To se projeví na rozdílnosti konstant  $C$  a  $n$  regresních křivek proložených experimentálními body pro jednotlivé poměry  $\kappa = s_\tau/s_\sigma$ .

## Porovnání přístupů k hodnocení šíření únavových trhlin



Obr.1 Závislost odpovídající stanovení délky trhliny způsobem **A**



Obr.2 Závislost odpovídající stanovení délky trhliny způsobem **B**

V následující tab. 1 jsou uvedeny hodnoty konstant  $C$  a  $n$  modifikovaného Parisova vztahu pro různé poměry směrodatných odchylek aplikovaných náhodných procesů.

Tab.1 Konstanty  $C$  a  $n$  modifikovaného Parisova vztahu pro různé poměry  $\kappa$

$\kappa$	Směrodat. odchylky		C		n	
	$s_\sigma$ [MPa]	$s_\tau$ [Mpa]	Způsob A	Způsob B	Způsob A	Způsob B
0	83,67	0	$4,9246 \cdot 10^{-15}$	$2,0321 \cdot 10^{-21}$	1,6534	2,5419
0,47	59,3	27,7	$8,0034 \cdot 10^{-15}$	$9,3980 \cdot 10^{-27}$	1,5358	3,2264
0,97	37,5	36,24	$1,1119 \cdot 10^{-19}$	$1,7905 \cdot 10^{-32}$	2,2001	4,0132
3,04	13,65	41,3	$1,6095 \cdot 10^{-20}$	$6,5704 \cdot 10^{-33}$	2,3750	4,1403
78,5	$\sim 0$	41,6	$6,7278 \cdot 10^{-18}$	$2,1562 \cdot 10^{-33}$	1,9253	4,1581

Z tabulky vyplývá, že konstanty  $C$  a  $n$  se pro různé poměry  $\kappa$  liší. Je proto zřejmé, že nejsou závislé pouze na materiálu, ale také na vzájemném poměru normálových a smykových napětí obou náhodných procesů. Vzhledem k značným rozdílům jednotlivých konstant, nelze provést jejich zprůměrování a pracovat s těmito středními hodnotami jako v případě jednoosého harmonického zatěžování. To komplikuje situaci při výpočtu zbytkové životnosti u součástí namáhaných kombinovaným náhodným zatížením.

### 3. VÝPOČET ŽIVOTNOSTI V OBLASTI ŠÍŘENÍ DLOUHÝCH TRHLIN

Modifikovaného Parisova vztahu jsme použili pro výpočet životnosti sledovaných trubkových vzorků zatěžovaných kombinovaným náhodným zatížením tah-tlak – krut při různých poměrech  $\kappa$  a různých úrovních napětí v aplikovaných procesech zatížení. Abychom mohli vzájemně porovnat intenzitu napětí v případě jednotlivých zkoušek, zavedli jsme ve shodě s [4] pojem efektivní směrodatné odchylky ve tvaru

$$s_d = \sqrt{s_\sigma^2 + (k_c s_\tau)^2} \quad (5)$$

kde

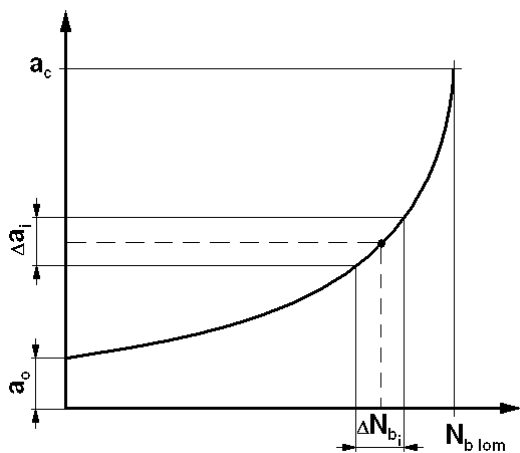
$s_\sigma$  ..... směrodatná odchylka průběhu normálových napětí od tahu-tlaku

$s_\tau$  ..... směrodatná odchylka průběhu smykových napětí od krutu

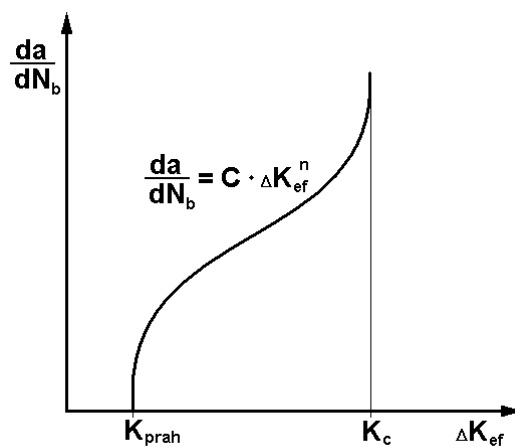
$k_c$  ..... korekční součinitel umožňující převést poškozující účinek smykových napětí na normálová. Jeho hodnota je dána vztahem  $k_c = \sigma_c^* / \tau_c^*$ , kde  $\sigma_c^*$  a  $\tau_c^*$  jsou meze únavy sledovaných trubek s příčnými otvory při harmonickém zatížení. Pro tyto trubky vyrobené z materiálu ČSN 411523.1 byla hodnota  $k_c$  experimentálně stanovena jako poměr  $120 / 80 = 1,5$ .

V Parisově vztahu (1) budou každé hodnotě  $\kappa$  odpovídat jiné hodnoty  $C$  a  $n$ , které odečteme z tab. 1. Při výpočtu životnosti byla použita numerická integrace v rozsahu délek trhlin  $a_0 \div a_c$ , kde jsme za počáteční délku trhliny ve všech případech zvolili tzv. technickou délku trhliny  $a_0 = 0,5$  mm a kritickou délku trhliny vypočítali ze vztahu

$$a_c = \left[ \frac{K_c}{s_d \sqrt{\pi}} \right]^2 \quad (6)$$



Obr.3 Křivka životnosti – závislost  $a - N_b$



Obr.4 Závislost  $da / dN_b - \Delta K_{ef}$

## Porovnání přístupů k hodnocení šíření únavových trhlin

Kritickou hodnotu faktoru intenzity napětí  $K_c$  pro oblast nestabilního šíření jsme získali jako střední hodnotu z experimentálních hodnot pro jednotlivé poměry  $\kappa$ . Tyto hodnoty pohybující se v rozsahu  $10,755926 \cdot 10^6 \div 12,510972 \cdot 10^6$ , poskytly střední hodnotu  $K_c = 11,5767 \cdot 10^6 \text{ Nm}^{-3/2}$ . Další postup výpočtu je zřejmý z následujících obr.3 a 4. Rozdělíme oblast mezi  $a_0$  a  $a_c$  v obr.3 na  $k$  stejných dílků  $\Delta a_i$ . Střední délce tohoto úseku na křivce životnosti odpovídá příslušný poměr  $\Delta a_i / \Delta N_{bi}$ , pro nějž z Parisova vztahu (1) platí, že

$$\Delta N_{bi} = \frac{\Delta a_i}{C \Delta K_{ief}^n} \quad (7)$$

Zbytkovou životnost v oblasti dlouhých trhlin pak vypočítáme ze vztahu

$$N_b = \sum_{i=1}^k \Delta N_{bi} = \sum_{i=1}^k \frac{\Delta a_i}{C \Delta K_{ief}^n} \quad (8)$$

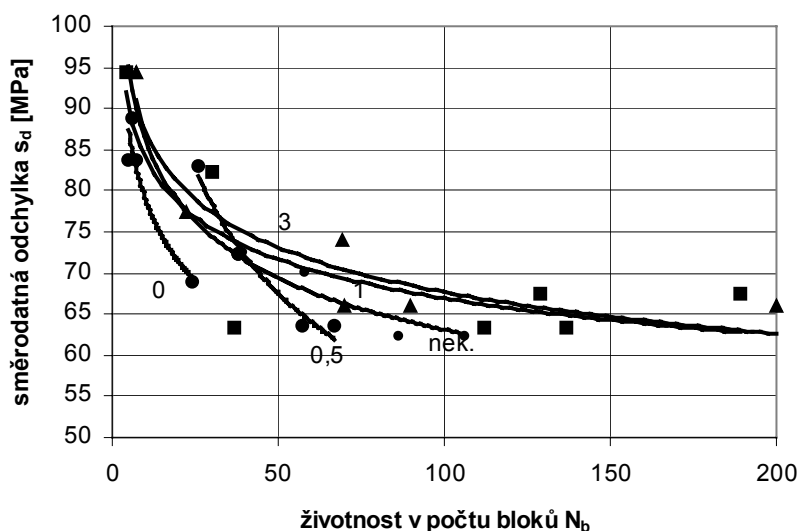
Tab.2 Porovnání vypočtených a experimentálně stanovených životností

Číslo vzorku	$\kappa = s_\tau / s_\sigma$	$s_d$ [MPa]	Životnost [ $N_b$ ] v oblasti šíření dlouhých trhlin		
			Experiment	Výpočet – $a_{stř.}$ podle	
				A	B
1	0	83,67	7	8	5
2	0	83,67	5		
3	0	88,93	6	6,9	4
4	0	69,03	24	12,5	9,8
5	0,47	72,4	38	40,4	31,9
6	0,47	72,4	27		
7	0,48	83,04	26	29,6	18,6
8	0,48	63,6	67	54,2	52,3
9	0,48	63,6	57		
10	0,97	66	70		
11	0,97	66	90	152,3	92,1
12	0,97	66	200		
13	0,94	73,91	69	114	55,9
14	0,94	77,4	22	101,4	45,4
15	0,93	94,4	7	60,4	18,2
16	3,04	63,4	37		
17	3,04	63,4	112	86,7	41,7
18	3,04	63,4	137		
19	2,78	67,42	189		
20	2,78	67,42	129	73,8	31,7
21	2,98	82,31	30	43,3	12,7
22	2,79	94,5	4	29,7	6,6
23	78,5	62,4	86		
24	78,5	62,4	106	185,1	104,6
25	159	70,13	58	140	61,8
26	205,3	72,66	39	128,4	52,5
27	118,6	94,3	5	67,6	15,5

Uvedený postup jsme aplikovali u 27 zkušebních vzorků zatěžovaných při různém poměru  $\kappa$  a různých hodnotách  $s_d$ . Při výpočtu jsme pracovali se středními hodnotami  $a_{stř.}$  a konstantami  $C$  a  $n$ , které odpovídaly oběma uvedeným způsobům **A** i **B**. Výsledky jsou uvedeny v tab.2.

Z tabulky je zřejmý především značný rozptyl v experimentálních výsledcích zejména při poměrech  $\kappa > 0,5$ , kdy se začíná více uplatňovat poškozuující účinek smykového napětí. Vypočítané hodnoty životnosti zapadají celkem rozumně do tohoto rozptylu. Volba střední hodnoty délky trhliny aplikací způsobu **A** případně **B** ovlivňuje výsledek výpočtu. Nelze však říci který způsob zpracování je lepší, protože neexistuje jednoznačná výhoda některého z nich. Obecně lze říci, že způsob **A** vede k vyšším výpočtovým hodnotám životnosti, zatímco způsob **B** k hodnotám konzervativnějším, což je z hlediska praktické aplikace lepší. Překvapivě dobré výsledky byly získány při aplikaci způsobu **B** v případech téměř čistého náhodného krutu ( velké hodnoty  $\kappa$  ), kdy trhliny vznikají na hraně otvoru a šíří se v rovině natočené pod úhlem  $45^\circ$ . Výpočtová metoda vychází totiž pouze z velikosti směrodatných odchylek působících náhodných procesů a zanedbává účinek natáčení rovin hlavních napětí. Sledování šíření trhlin u trubkových vzorků však prokázalo, že ačkoliv dílčí šíření trhlin při jednotlivých zatěžovacích blocích probíhá pod různými úhly, šíření magistrální trhliny která rozhoduje o celkové životnosti odpovídá vždy směru rovin maximálních normálových napětí  $\sigma_1$  a  $\sigma_2$  pro aplikovaný poměr  $\kappa$  - viz [1].

Z tabulky je zřejmé, že životnost souvisí s velikostí tzv. poškozuujícího napětí, pro jehož směrodatnou odchylku  $s_d$  byl uveden vztah (5). Na obr.5 jsou vyneseny závislosti životnosti



Obr.5 Experimentálně stanovené životnosti  $N_b$  v závislosti na směrodatné odchylce  $s_d$  pro různé poměry  $\kappa$

v počtu bloků  $N_b$  na hodnotě této směrodatné odchylky  $s_d$  pro různé poměry  $\kappa$ . Z obrázku je vidět, že se při vyšších hodnotách  $s_d$  životnosti příliš neliší. Nezáleží proto na poměru normálových a smykových napětí. Při nižších hodnotách  $s_d$  je rozdíl životností v případě procesů u nichž převládá normálové napětí ( $\kappa = 0$  a  $0,5$ ) a u procesů s převládajícím smykovým napětím značný. Zajímavé je sledovat křivky pro poměry  $\kappa = 0$  a  $0,5$ . Křivky probíhají paralelně, což znamená, že v případech kdy převládá náhodné zatížení normálových napětí, přídavná menší smyková napětí od krutu způsobí v kombinaci s tímto

normálovým napětím při stejné hodnotě  $s_d$  konstantní zvýšení výsledné životnosti. Sledování šíření trhlin na trubkových vzorcích s příčným otvorem prokázalo, že trhliny při poměru  $\kappa = 0,5$  vycházejí ze stejného místa na hraně otvoru ve střední rovině jako v případě, kdy poměr  $\kappa = 0$ . Úhel natočení roviny hlavních normálových napětí je v to případech menší, než úhel zjištěný z Mohrovy kružnice a pohybuje se pouze kolem  $2^\circ$ .

#### 4. SHRUTÍ VÝSLEDKŮ

Výsledky uvedených prací lze stručně shrnout do následujících bodů:

a) Rovněž v případě kombinovaného neproporcionálního náhodného zatěžování lze pro výpočet životnosti v oblasti dlouhých trhlin aplikovat známý Parisův vztah, který je nutné příslušně modifikovat. Při této modifikaci nutno přihlídnout jednak k současnému působení minimálně dvou módů při rozevírání trhlin a k charakteru náhodného zatěžování obou zatěžovacích procesů.

b) Uvedená specifika vedla k aplikaci tzv. efektivní hodnoty faktoru intenzity napětí  $K_{ef}$  a jeho rozkmitu  $\Delta K_{ef}$ . Ve výpočtech byl pro porovnání intenzity jednotlivých zkoušek použit vztah pro tzv. efektivní hodnotu směrodatné odchylky  $s_d$  poškozujícího napětí, který byl odvozen v [1].

c) Experimentální sledování rychlosti šíření trhlin při různých poměrech  $\kappa = s_\tau / s_\sigma$  se provádělo na trubkových vzorcích s příčným otvorem, vyrobených z materiálu ČSN 411523.1. Bylo zjištěno, že konstanty  $C$  a  $n$  tzv. modifikovaného Parisova vztahu v případě kombinovaného náhodného zatěžování nezávisí pouze na materiálu, nýbrž i na poměru  $\kappa$ , to znamená na poměru normálového a smykového napětí. V tom je jeden z problémů při výpočtu zbytkové životnosti u tohoto způsobu zatěžování.

d) Výpočet životnosti byl proveden pro dva obvykle používané způsoby stanovení střední hodnoty délky trhliny **A** a **B**, které se ve výsledcích projeví různými hodnotami výsledných životností. Pro výpočet životnosti se použila numerická integrace v rozsahu délek trhlin  $a_0 - a_c$ , kde za počáteční délku trhliny byla zvolena ve všech případech hodnota 0,5mm a kritická délka trhliny byla stanovena na základě střední hodnoty kritického faktoru intenzity napětí  $K_c$  získaného z provedených experimentů.

e) Výpočet životnosti byl aplikován pro 27 zkušebních vzorků, jejichž zatěžování se lišilo jak poměrem  $\kappa$  směrodatných odchylek normálových a smykových napětí, tak úrovní těchto napětí ( různé hodnoty  $s_d$  ).

f) Porovnáním vypočtených životností s experimentálně stanovenými bylo zjištěno, že vypočtené hodnoty velmi dobře souhlasí pro poměry  $\kappa = 0$  a 0,5, tedy v případech, kdy převládá úroveň normálových napětí. Velmi dobré výsledky byly získány při aplikaci způsobu **B** pro  $\kappa \rightarrow \infty$ . Pro poměry  $\kappa = 1$  a 3 daly experimenty větší rozptyly, takže vypočtené hodnoty sice v tomto rozptylovém pásmu leží, ale exaktní hodnocení nelze provést. Zdá se že lepší výsledky dává způsob **B**, jehož hodnoty jsou nižší, tedy na straně vyšší bezpečnosti.

g) Z tabulky výsledků vyplývá, že rovněž závislost životnosti na hodnotě  $s_d$  zatěžovacích procesů závisí na poměru  $\kappa$ . Při vyšších hodnotách  $s_d$  jsou rozdíly v životnostech menší, při nižších hodnotách větší.

#### 5. ZÁVĚR

V příspěvku jsme se pokusili aplikovat Parisův vztah používaný pro výpočet zbytkové životnosti konstrukcí namáhaných jednoosým harmonickým zatížením rovněž pro výpočet životnosti v případě kombinovaného náhodného zatížení ( v daném případě tah-tlak – krut ). Pro výpočet byl Parisův vztah příslušně modifikován, rozkmit amplitudy nominálních napětí

byl nahrazen směrodatnými odchylkami aplikovaných náhodných procesů. Bylo zjištěno, že v případě kombinovaného zatěžování závisí hodnoty konstant  $C$  a  $n$  Parisova vztahu nejen na materiálu konstrukce, nýbrž i na poměru smykových a normálových napětí. To vyžaduje přesnou znalost konstant pro konkrétní poměry složek zatížení. Tato záležitost komplikuje situaci v případě těchto aplikací. Přestože byl pro hodnocení přesnosti výpočtu k dispozici poměrně značný počet experimentálních hodnot, ukázalo se, že vzhledem k jejich značnému rozptylu zejména při poměrech  $\kappa = 1$  a  $3$ , by bylo třeba počet experimentů ještě zvýšit.

Z tabulky výsledků vyplývá, že oba postupy doporučené pro stanovení střední hodnoty v případě tzv. vnitřních vrubů, vedou k odlišným životnostem. Při aplikaci postupu **A** získáme hodnoty vyšší, v případě postupu **B** nižší. Lze proto vyvodit závěr, že pro poměry  $\kappa = 0; 0,5$  a  $\kappa \rightarrow \infty$  bude lépe aplikovat konzervativnější postup **B**, který k délce trhliny připočítává poloměr otvoru. Závěrem nutno uvést, že prezentovaný příspěvek si nekladl za cíl vyřešit problematiku únavové životnosti složitě dynamicky zatěžovaných konstrukcí, což by ani nebylo možné. Jeho smyslem bylo poukázat na složitost dané problematiky při řešení dílčí úlohy stanovení zbytkové životnosti konstrukcí a na nutnost odlišného přístupu oproti obvyklému, který byl aplikován při jednoosém harmonickém zatěžování.

Poděkování:

Práce byla podpořena Grantovou agenturou ČR grantovým projektem č. 101/02/0043 a výzkumným záměrem Ústavu termomechaniky AV ČR č. AVEZ 2076919.

#### LITERATURA

- [1] Svoboda J., Balda M., Fröhlich V.: *Šíření trhlín u konstrukčních dílů namáhaných náhodným víceosým neproporcionálním zatížením*, In: Sborník konference Výpočtová mechanika 2003, Nečtiny 2003, s.429 – 436, ISBN 80 – 7082 – 999-0.
- [2] Wei – Ren Chen – Keer L. M.: Journal of Engineering Materials and Technology, Vol.113, 1991, pp.222 – 227.
- [3] Radaj D.: Ermüdungsfestigkeit – Grundlagen für Leichtbau, Maschinen – und Stahlbau, In: Springer – Verlag Berlin Heidelberg, 1995.
- [4] Balda M., Svoboda J.: *Aplikace energetického kritéria pro výpočet životnosti konstrukcí namáhaných víceosým náhodným neproporcionálním zatížením*, In: Sborník konference Výpočtová mechanika 2003, Nečtiny 2003, s. 23 – 28, ISBN 80 – 7082 – 999 –0.