

ELASTICKÉ VLNY V ANIZOTROPNÍCH DESKÁCH

P. Hora, O. Červená
Ústav termomechaniky AV ČR

Příspěvek vznikl na základě podpory grantu cíleného vývoje a výzkumu AV ČR č. IBS2076356 „Ultrazvukové metody vyšetřování mechanických vlastností kompozitních materiálů používaných v letectví“ (řešitel Ing. M. Landa, CSc.) a záměru ÚT AV ČR AV0Z 2076919.

Rovnice elastodynamiky

Pohybové rovnice:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad \leftrightarrow \quad T_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i,$$

Konstitutivní vztahy:

$$\mathbf{T} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{S} \quad \leftrightarrow \quad T_{ij} = C_{ijkl} S_{kl}, \quad (\text{ED})$$

Vztahy výchylky-deformace:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \{ \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \} \quad \leftrightarrow \quad S_{kl} = \frac{1}{2} \{ u_{k,l} + u_{l,k} \},$$

kde \mathbf{T} je tenzor napětí druhého řádu,

\mathbf{S} je tenzor deformací druhého řádu,

\mathbf{C} je tenzor elastických modulů čtvrtého řádu,

\mathbf{u} je vektor výchylek

a ρ je hustota materiálu.

Vliv symetrie \mathbf{T} , \mathbf{S} a \mathbf{C}

Symetrie tenzoru napětí \mathbf{T} :

$$T_{ij} = T_{ji}$$

Symetrie tenzoru deformací \mathbf{S} :

$$S_{kl} = S_{lk}$$

Hlavní symetrie tenzoru elastických modulů \mathbf{C} :

$$C_{ijkl} = C_{klij}$$

⇒ maximálně 21 nezávislých elastických konstant.

Zkrácený zápis

Pro výpočetní účely je často jednodušší uvažovat 6 nezávislých složek tenzoru napětí a deformací uspořádaných do vektorového tvaru:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T} &= [T_{11} \quad T_{22} \quad T_{33} \quad T_{23} = T_{32} \quad T_{31} = T_{13} \quad T_{12} = T_{21}]^T, \\
 \mathbf{S} &= [S_{11} \quad S_{22} \quad S_{33} \quad 2S_{23} = 2S_{32} \quad 2S_{31} = 2S_{13} \quad 2S_{12} = 2S_{21}]^T.
 \end{aligned}$$

Dále budeme používat velké dolní indexy k označení zkráceného zápisu. Tedy

$$\begin{aligned}
 \{ij = 11 \rightarrow I = 1; \quad ij = 22 \rightarrow I = 2; \quad ij = 33 \rightarrow I = 3; \\
 ij = 23 \vee 32 \rightarrow I = 4; \quad ij = 31 \vee 13 \rightarrow I = 5; \quad ij = 12 \vee 21 \rightarrow I = 6\}.
 \end{aligned}$$

tenzorová reprezentace \Leftrightarrow vektorová reprezentace

Konstitutivní vztahy ve zkráceném zápisu

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{T}_I = \mathbf{C}_{IJ} \mathbf{S}_J.$$

Elastické vlny v neohraničeném prostředí

Uvažujme neohraničené homogenní lineární (elastické) anizotropní prostředí.

Rovinné harmonické vlny:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{U} \exp \{jk(\mathbf{l} \cdot \mathbf{r} - vt)\}. \quad (\text{ORHV})$$

Dosazením vztahu (ORHV) do elastodynamických rovnic (ED) dostaneme

$$C_{ijkl}l_j l_k^2 U_k = \rho \omega^2 U_i,$$

kterou můžeme přepsat na

$$\{\Gamma_{ik} - \delta_{ik} \rho v^2\} U_k = 0, \quad (\text{ChR})$$

kde

$$\Gamma_{ik} = C_{ijkl}l_j l_l. \quad (\text{ChM})$$

- vztah (ChR) popisuje problém vlastních čísel,
- vztah (ChR) nezávisí na frekvenci,
- Christoffelova matice je symetrická a pozitivně definitní.
 - ⇒ tři reálné, kladné vlastní hodnoty pro Γ ,
 - ⇒ rychlosti fázových vln v jsou reálné,
 - ⇒ reprezentují šířící módy.

Vlastní čísla se získají řešením charakteristické rovnice

$$\det \{ \Gamma_{ik} - \delta_{ik} \rho v^2 \} = 0. \quad (\text{SR})$$

- pro každé vlastní číslo $v^{(i)}$ existuje alespoň jeden reálný vlastní vektor,
- vždy lze najít tři ortogonální vlastní vektory, které označíme $\mathbf{U}^{(i)}$.

⇒ v libovolném homogenním anizotropním materiálu se podél libovolného zvoleného směru šíření \mathbf{l} vždy mohou šířit tři typy rovinných harmonických vln.

Tyto tři vlny budou mít rozdílné fázové rychlosti $v^{(i)}$ a odpovídající vektory výchylek $\mathbf{U}^{(i)}$ budou vzájemně ortogonální.

Zvláštní případ: izotropní prostředí

Jelikož jsou v izotropním materiálu všechny směry rovnocenné, můžeme vhodně za směr šíření zvolit např. $\mathbf{l} = \mathbf{e}_1$, takže Christoffelova matice se zjednoduší na

$$\Gamma = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix}.$$

Charakteristická rovnice bude

$$(c_{11} - \rho v^2) (c_{44} - \rho v^2) (c_{44} - \rho v^2) = 0.$$

Její tři kořeny $v^{(i)}$ jsou:

$$v^{(1)} \equiv v_L = \sqrt{c_{11}/\rho},$$

jehož polarizace je rovnoběžná se směrem šíření a představuje podélnou vlnu; a dva degenerované kořeny:

$$v^{(2)} = v^{(3)} \equiv v_T = \sqrt{c_{44}/\rho},$$

jejichž polarizace je kolmá se směrem šíření a představují příčné vlny.

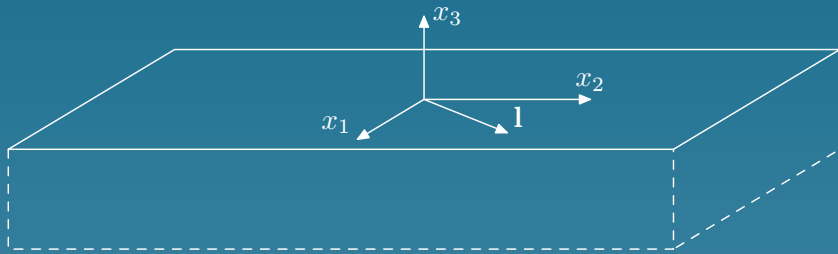
Výpočet Christoffelovy matice

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 \\ 0 & l_3 & l_2 \\ l_3 & 0 & l_1 \\ l_2 & l_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{L}^T \mathbf{C} \mathbf{L}$$

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 & 0 & l_3 & l_2 \\ 0 & l_2 & 0 & l_3 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & l_3 & l_2 & l_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 \\ 0 & l_3 & l_2 \\ l_3 & 0 & l_1 \\ l_2 & l_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Elastické vlny na povrchu (poloprostoru)



- okrajová podmínka - volný povrch,
- výchylky se zmenšují s hloubkou
- vektor šíření pouze v rovině $x_1 - x_2$.

Hledíme řešení ve tvaru

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{U} \exp \{jkl_3x_3\} \exp \{jk(l_1x_1 + l_2x_2 - vt)\}. \quad (\text{PRHV})$$

Poněvadž je (PRHV) formálně stejné jako (ORHV), pohybové rovnice se samozřejmě redukují na formálně stejnou Christoffelovu rovnici

$$\{\Gamma_{ik} - \delta_{ik}\rho v^2\} U_k = 0. \quad (\text{PChR})$$

Řešení problému vlastních čísel (PChR) vede na charakteristickou rovnici

$$\det \{\Gamma_{ik} - \delta_{ik}\rho v^2\} = 0. \quad (\text{PSR})$$

- rychlost v považujeme za známou a vyřešíme polynomickou rovnicí 6. stupně pro l_3 ,
- vybereme přípustná řešení $l_3^{(n)}$, $n = 1, 2, 3$ (imaginární část záporná),
- vypočteme odpovídající vlastní vektory $\mathbf{U}^{(n)}$.

⇒ tři parciální vlnová řešení

Obecné řešení pro výchylky:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^3 \alpha_n \mathbf{U}^{(n)} \exp \left\{ j k l_3^{(n)} x_3 \right\} \exp \left\{ j k (l_1 x_1 + l_2 x_2 - vt) \right\}.$$

Dosazením tohoto obecného řešení do okrajových podmínek

$$T_{i3} = C_{i3kl} S_{kl} = C_{i3kl} u_{k,l} = 0 \text{ na } x_3 = 0 \text{ pro } i = 1, 2, 3 \quad (\text{POP})$$

dostaneme soustavu tří homogenních rovnic pro váhové konstanty α_n

$$T_{i3}|_{x_3=0} = jk \sum_{n=1}^3 C_{i3kl} \alpha_n U_k^{(n)} l_l^{(n)} \exp \left\{ jk (l_1 x_1 + l_2 x_2 - vt) \right\} = 0.$$

Tyto rovnice mohou být zapsány ve tvaru

$$[d_{mn}]\{\alpha\} = \{0\}, \quad (\text{POPM})$$

kde matice d je řádu 3 a je definována jako

$$d_{mn} = C_{3mkl} U_k^{(n)} l_l^{(n)}.$$

Netriviální řešení získáme, pokud

$$\det(d_{mn}) = 0. \quad (\text{POPD})$$

Pokud se výše uvedený determinant pro zvolené v a vypočtené l_3 a $\mathbf{U}^{(n)}$ neblíží k nule, pak zvolíme novou rychlost a tento postup opakujeme, dokud determinant není roven nule.

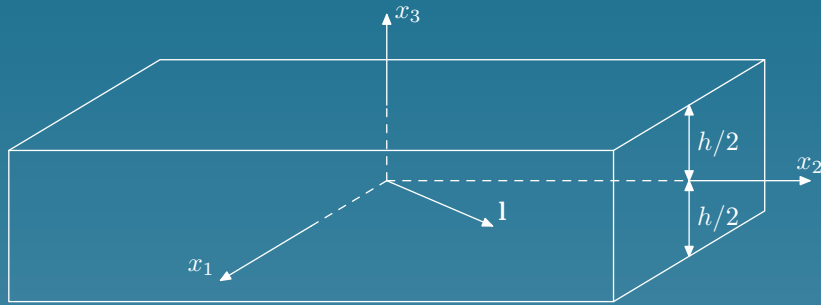
Algoritmus řešení povrchových vln v anizotropním materiálu

1. Zvolit materiál, orientaci a směr šíření.
2. Zvolit rychlost v .
3. Vyřešit problém vlastních čísel (PChR) získáním kořenů polynomické rovnice 6. stupně, kterou dostaneme z (PSR).
4. Určit přípustné kořeny $l_3^{(n)}$ se zápornou imaginární částí. Získat odpovídající vlastní vektory $\mathbf{U}^{(n)}$. Vlastní vektory mohou být komplexní.
5. Ověřit zda se determinant okrajových podmínek (POPD) blíží k nule. Determinant může být opět komplexní.
6. Pokud okrajové podmínky (POPD) nejsou splněny v požadované přesnosti, jít zpět do bodu 2 a změnit rychlost v .
Jinak poznamenat akceptovatelné řešení $(v_R, l_3^{(n)}, \mathbf{U}^{(n)})$.
7. Jakmile je získána množina $(v_R, l_3^{(n)}, \mathbf{U}^{(n)})$, která splňuje jak Christoffelovu rovnici, tak determinant okrajových podmínek, určíme váhové konstanty α_n vyřešením rovnice (POPM). Tím se získá pole výchylek.

Rayleighovy vlny v anizotropním prostředí:

- Rayleighovy vlny existují pro každý směr, ale jejich rychlosti závisí na směru šíření.
- Kořeny l_3 mohou být komplexní a ne jen ryze imaginární, jako v případě izotropního prostředí. Což znamená, že pokles vzhledem k x_3 může být tlumen oscilačně.
- Vektory rychlosti energie a šíření nemusí být souběžné.
- Podél jistých izolovaných směrů může být rychlost Rayleighovy povrchové vlny větší než rychlost (quazi) příčné vlny v objemovém materiálu. V okolí těchto izolovaných směrů existují pseudo-Rayleighovy vlny, které nesplňují zcela podmínku poklesu výchylky v nekonečné hloubce. (Tyto pseudo-Rayleighovy vlny mají vektory energie s nenulovými složkami kolmými k povrchu.)

Elastické vlny v deskách



- okrajové podmínky - volný povrch na dvou plochách $x_3 = \pm h/2$,
- nemáme podmínku *útlumu* s hloubkou.

Opět budeme hledat řešení ve tvaru

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{U} \exp \{jkl_3x_3\} \exp \{jk(l_1x_1 + l_2x_2 - vt)\}.$$

Pohybové rovnice se samozřejmě redukují na formálně stejnou Christoffelovu rovnici

$$\{\Gamma_{ik} - \delta_{ik}\rho v^2\} U_k = 0. \quad (\text{DChR})$$

Řešení problému vlastních čísel (DChR) vede na charakteristickou rovnici

$$\det \{\Gamma_{ik} - \delta_{ik}\rho v^2\} = 0. \quad (\text{DSR})$$

- rychlost v považujeme za známou a vyřešíme polynomickou rovnicí 6. stupně pro l_3 ,
- všechna řešení $l_3^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots, 6$ jsou přípustná,
- vypočteme odpovídající vlastní vektory $\mathbf{U}^{(n)}$.

⇒ šest parciálních vlnových řešení

Obecné řešení pro výchylky:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^6 \alpha_n \mathbf{U}^{(n)} \exp \left\{ j k l_3^{(n)} x_3 \right\} \exp \{ j k (l_1 x_1 + l_2 x_2 - v t) \}.$$

Dosazením tohoto obecného řešení do okrajových podmínek

$$T_{i3} = C_{i3kl} S_{kl} = C_{i3kl} u_{k,l} = 0 \text{ na } x_3 = \pm h/2 \text{ pro } i = 1, 2, 3 \quad (\text{DOP})$$

dostaneme dvě soustavy tří homogenních rovnic pro váhové konstanty α_n

$$\begin{aligned}
 T_{i3}|_{x_3=-h/2} &= jk \exp \{jk(l_1x_1 + l_2x_2 - vt)\} \\
 \sum_{n=1}^3 C_{i3kl} \alpha_n U_k^{(n)} l_l^{(n)} \exp \left\{ -jk(l_3^{(n)} h/2) \right\} &= 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{i3}|_{x_3=h/2} &= jk \exp \{jk(l_1x_1 + l_2x_2 - vt)\} \\
 \sum_{n=1}^3 C_{i3kl} \alpha_n U_k^{(n)} l_l^{(n)} \exp \left\{ jk(l_3^{(n)} h/2) \right\} &= 0.
 \end{aligned}$$

Tyto rovnice mohou být zapsány ve tvaru

$$[d_{mn}] \{\alpha\} = \{0\}, \quad (\text{DOPM})$$

kde matice d je nyní řádu 6 a je definována jako

$$d_{mn} = \begin{bmatrix} \left[d_{mn}^{(1,2,3)} \right] \\ \left[d_{mn}^{(4,5,6)} \right] \end{bmatrix},$$

$$d_{mn}^{(1,2,3)} = C_{3mkl} U_k^{(n)} l_l^{(n)} \exp \left\{ -jkl_3^{(n)} h/2 \right\},$$

$$d_{mn}^{(4,5,6)} = C_{3mkl} U_k^{(n)} l_l^{(n)} \exp \left\{ jkl_3^{(n)} h/2 \right\}.$$

Netriviální řešení získáme, pokud

$$\det(d_{mn}) = 0. \quad (\text{DOPD})$$

Povšimněme si, že na rozdíl od objemových vln a povrchových vln závisí nyní řešení na vlnovém čísle k . Proto můžeme očekávat disperzní řešení, kde rychlost bude nelineární funkcí frekvence.

Pokud se výše uvedený determinant pro zvolené v a vypočtené $l_3^{(n)}$ a $U^{(n)}$ neblíží k nule, pak zvolíme novou rychlost a tento postup opakujeme, dokud determinant není roven nule.

Algoritmus řešení vlnovodných vln v anizotropní desce

1. Zvolit materiál, orientaci, směr šíření a *vlnové číslo*.
2. Zvolit rychlost v .
3. Vyřešit problém vlastních čísel (DChR) získáním kořenů polynomické rovnice 6. stupně, kterou dostaneme z (DSR).
4. Určit *všechny* kořeny $l_3^{(n)}$ a získat odpovídající vlastní vektory $\mathbf{U}^{(n)}$.
Vlastní vektory mohou být komplexní.
5. Ověřit zda se determinant okrajových podmínek (DOPD) blíží k nule. Opět determinant může být komplexní.
6. Pokud okrajové podmínky (DOPD) nejsou splněny v požadované přesnosti, jít zpět do bodu 2 a změnit rychlost v .
Jinak poznamenat akceptovatelné řešení $(v, l_3^{(n)}, \mathbf{U}^{(n)})$.
7. Jakmile je získána množina $(v, l_3^{(n)}, \mathbf{U}^{(n)})$, která splňuje jak Christoffelovu rovnici, tak determinant okrajových podmínek, určíme váhové konstanty α_n vyřešením rovnice (DOPM). Tím se získá pole výchylek.

Výpočty

$$C_{IJ} = \begin{bmatrix} 128.20 & 6.90 & 6.90 & 0 & 0 & 0 \\ & 14.95 & 7.33 & 0 & 0 & 0 \\ & & 14.95 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 3.81 & 0 & 0 \\ & \text{sym} & & & 6.73 & 0 \\ & & & & & 6.73 \end{bmatrix} \text{ [GPa]}$$

$$C_{IJ} = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ & \text{sym} & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{bmatrix}$$

$$C_{IJ} = \begin{bmatrix} 15 & 7 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ & 15 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ & & 15 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 4 & 0 & 0 \\ & \text{sym} & & & 4 & 0 \\ & & & & & 4 \end{bmatrix} \text{ [GPa]}$$

Grafy

Úhlová závislost dispersních křivek
pro antisymetrické módy

Úhlová závislost dispersních křivek
pro symetrické módy

Izotropizace dispersních křivek
pro antisymetrické módy

Izotropizace dispersních křivek
pro symetrické módy

OBSAH

Rovnice elastodynamiky

Vliv symetrie T , S a C

Zkrácený zápis

Konstitutivní vztahy ve zkráceném zápisu

Elastické vlny v neohraničeném prostředí

Zvláštní případ: izotropní prostředí

Výpočet Christoffelovy matice

Elastické vlny na povrchu

Algoritmus řešení povrchových vln v anizotropním materiálu

Rayleighovy vlny v anizotropním prostředí

Elastické vlny v deskách

Algoritmus řešení vlnovodných vln v anizotropní desce

Výpočty Grafy