
Československá akademie věd
Ústav technologie a spolehlivosti strojních konstrukcí
Plzeň, Veleslavínova 11



Autor: Ing. Petr HORA, CSc.

TEORIE ZOBECNĚNÉHO PAPRSKU A ANALÝZA TRANZIENTNÍCH VLN VE VÍCEVRSTVÉM PEVNÉM TĚLESE
--

Číslo zprávy: 114 VP

Číslo kopie:

Vedoucí grantu: Ing. František Valeš, CSc.

Ředitel ústavu: Ing. Miroslav Balda, DrSc.

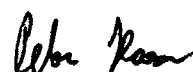
Plzeň, prosinec 1992

Tato zpráva vznikla na základě podpory grantu ČSAV 27007 "Využití napěťových vln pro diagnostiku porušování", který se řeší v ÚTSSK ČSAV v Plzni. Jednou součástí tohoto grantu je řešení stavu napjatosti tlusté desky. Tento problém je řešen jednak integrálními transformacemi a dále metodou zobecněných paprsků, jejíž výklad je těžištěm této zprávy. Metoda zobecněných paprsků je zde aplikována na problém šíření elastických vln ve vícevrstevném lineárním isotropním homogenním prostředí.

Za východisko pro tuto zprávu byl zvolen článek "The Generalized Ray Theory and Transient Responses of Layered Elastic Solids" od Paa a Gajewského vydaný v roce 1977 ve "Physical Acoustics". Volný překlad tohoto článku je rozšířen o dodatky, ve kterých jsou některé pasáže článku podrobněji vyloženy (zejména metoda Bromwichova rozvoje) a přidány další numerické příklady (s ohledem na řešení problému stavu napjatosti tlusté desky).

Zpráva si klade za hlavní cíl ozřejmit teorii zobecněného paprsku, aby bylo možno v budoucnu využít této teorie pro řešení takových problémů jako napjatost tlustostěnné skořepiny, šíření vln v sousém vícevrstevném prostředí, atd. Uvedené numerické příklady slouží pouze k demonstraci možností a výhod teorie zobecněného paprsku, nelze je pojímat jako zhodnocení šíření elastických vln v tlusté desce popř. ve vícevrstevném prostředí. Toto zhodnocení bude provedeno v následující zprávě, která bude zahrnovat příklady výpočtů napjatosti tlusté desky integrální metodou a teorií zobecněného paprsku s návazností na výsledky měření, která budou prováděna na povrchu ocelové desky při několika způsobech povrchového buzení a pro řadu měřících míst.

V Plzni 15. 12. 1992



ROZDĚLOVNÍK:

Výtisk číslo	1	archivní výtisk
	2	knihovna ÚTSSK AV ČR
	3	Ing. Jan Červ, CSc., ÚT AV ČR
	4	Ing. Petr Hora, CSc., ÚTSSK AV ČR

Obsah

Seznam použitých symbolů	6
I. Úvod	7
II. Rovnice pružnosti a jejich řešení	10
A. Rovnice pružnosti	10
B. Obecná řešení a zdrojové funkce	13
C. Teorie vlastních tvarů	19
D. Vývoj teorie zobecněného paprsku	21
III. Teorie zobecněného paprsku	24
A. Základní princip	25
B. Koeficienty odrazu a přestupu	31
C. Přijímací funkce a zobecněné paprsky	33
IV. Cagniardova metoda a tranzientní vlny vyvolané přímkovým zatížením	37
A. Cagniardova metoda	38
B. Přímé paprsky a lomené paprsky	43
V. Osově symetrické vlny vyvolané bodovým zatížením .	53
A. Osově symetrické vlny v jednoduché vrstvě	54
B. Inverze Laplaceových transformací	59
C. Odezva bodového zdroje z řešení přímkového zdroje	64
D. Řešení pro bodový zdroj v neohraničeném prostředí	67
VI. Obecná řešení pro bodový zdroj	70
A. Zobecněné paprsky pro libovolně orientovanou sílu	71
B. Dodatečné zdrojové funkce	77
C. Přibližná analýza paprskových integrálů	80
VII. Tranzientní odezvy a numerické příklady	89
A. Doby příchodů zobecněných paprsků	91
B. Numerický výpočet komplexních integrálů	94
C. Tranzientní odezvy pro desku a vrstevnaté pevné těleso	98

Dodatky :	
II.A.1	Přímkový zdroj exploze v nekonečném prostředí112
II.A.2	Explozivní bodový zdroj v nekonečném prostředí113
II.A.3	Přímková vertikální síla v nekonečném prostředí114
II.A.4	Bodová vertikální síla v nekonečném prostředí116
II.A.5	Přímková vertikální síla na volném povrchu poloprostoru118
II.A.6	Bodová vertikální síla na volném povrchu poloprostoru120
II.B	Metoda Bromwichova rozvoje122
VII.A	Mullerova metoda řešení nelineárních rovnic ...127
VII.B	Legendrův-Gaussův kvadraturní vzorec129
VII.C	Poznámky ke konvoluci137
VII.D	Další numerické příklady145
	Odkazy164

Seznam použitých symbolů

b	- skalární potenciál objemových sil
B	- vektorový potenciál objemových sil
c	- rychlost dilatační vlny v trojrozměrném kontinuu
C	- rychlost příčných vln
$F(t)$	- budící síla
F	- vektor objemových sil
$H(t)$	- Heavisideova funkce
$J_0(x)$	- Besselova funkce prvního druhu nultého řádu
$J_1(x)$	- Besselova funkce prvního druhu prvního řádu
k	- vlnové číslo
$P_n(x)$	- Legendův polynom n -tého stupně
r, φ, z	- cylindrické souřadnice
s	- parametr Laplaceovy transformace
t	- čas
u	- vektor posuvu
x, y, z	- kartézské souřadnice
$\delta(t)$	- Diracova funkce
Φ	- skalární výchylkový potenciál
Ψ	- vektorový výchylkový potenciál
λ, μ	- Laméovy konstanty
ρ	- hustota
τ	- tenzor napětí
ξ	- parametr Fourierovy popř. Hankelovy transformace
ω	- úhlová frekvence

Ve zprávě je použito anglosaské značení Laméových konstant (λ a μ). Má-li symbol více významů, je jeho lokální význam podrobně vysvětlen v příslušné části textu, kde se používá.

Mluví-li se ve zprávě o osové symetrii, je touto symetrií myšlena symetrie okolo osy rotace, jde tudíž o rotační symetrii.

I. Úvod

Krátce po publikování dvou monografií o vlnách ve vrstevnatém prostředí (Ewing a kol., 1957; Brekhovskikh, 1960) byla vyvinuta teorie zobecněného paprsku pro analýzu tranzientních vln ve vícevrstevném pevném tělese. V této teorii jsou elastické vlny, které se z důvodu vícenásobných odrazů a lomů šíří podél různých paprskových drah, reprezentovány řadou paprskových integrálů, z nichž každý může být přesně vypočten Cagniardovou metodou (Cagniard, 1939). Poněvadž pulsy, které jsou reprezentovány paprskovými integrály, přicházejí do místa pozorování postupně, poskytuje teorie přesné řešení pro tranzientní vlny ve vícevrstevném pevném tělese až do okamžiku příchodu následujícího paprsku.

Ačkoliv byla teorie původně vyvinuta pro geofyzikální aplikace (Spencer, 1960; Knopoffa kol., 1960; Pekeris a kol., 1965), může být snadno přizpůsobena pro analýzu signálů akustické emise. Akustické signály vyzařované z místa zatěžování nebo růstu defektů a trhlin v pevných látkách se příliš neliší od seismických vln, které jsou vyvolány pohybem zlomu, nebo zvukových vln šířících se ve vodě, které jsou generované explozí. Ve všech případech jsou vlny vyzařované ze zdroje zachyceny uvnitř vrstvy (deska, skořepina) nebo vícevrstvého prostředí. Sledováním paprskových drah umožňuje teorie zobecněného paprsku detailně analyzovat signály zaznamenané přijímačem.

Dosavadní diskuse o teorii zobecněného paprsku jsou roztroušeny ve vědeckých časopisech, hlavně v oboru geofyziky. V této zprávě se pokusíme systematicky ukázat podstatné prvky této matematické teorie a soustředit do jednoho místa vzorce a výsledky, které jsou užitečné v aplikacích.

Kromě své užitečnosti v akustice a geofyzice je teorie zobecněného paprsku také hlavním předmětem studia v dynamické teorii pružnosti. Analýza tranzientních vln v elastických pevných tělesech začala Stokesovým článkem (1849) o "Dynamické teorii ohybu". Počínaje Stokesovým řešením pro

koncentrovanou sílu v neohraničeném pevném tělese poskytuje metoda zobecněného paprsku možnost jednotného zpracování tranzientních vln v ohraničeném prostředí, včetně polo-
prostoru (Lamb, 1904; Lapwood, 1949; Pekeris, 1955; Chao, 1960), desky (Knopoff, 1958a; Davids, 1959), dvou pevných těles v těsném kontaktu (Cagniard, 1939; Brekhovskikh, 1960), jedné vrstvy na poloprostoru (Newlands, 1953; Pekeris a kol., 1965) a prostředí složeného z mnoha paralelních vrstev (Müller, 1969). Mimoto byla metoda nedávno rozšířena i na prostředí ohraničené sférickými a cylindrickými plochami (Gilbert a Helmberger, 1972; Chen, 1977; Pao a Ceranoglu, 1977) a nehomogenní prostředí (Chapman, 1974; 1976b). Toto je pozoruhodný výsledek, i když trvalo více než století, než ho bylo dosaženo.

V následující kapitole shrneme základní rovnice pružnosti a řešení odvozená integrálními transformacemi. Dále je též načrtnuta historie teorie zobecněného paprsku a podán přehled literatury. Hlavní prvky teorie jsou uvedeny v kapitolách III a IV. Kapitola III pojednává o tom, jak je konstruována integrální reprezentace Laplaceova obrazu vlnového pohybu podél paprskové dráhy, známá jako paprskový integrál, sestavením zdrojové funkce, koeficientů odrazu a přestupu, přijímací funkce a fázové funkce. Kapitola IV ukazuje nalezení zpětné Laplaceovy transformace paprskového integrálu v uzavřeném tvaru Cagniardovou metodou.

V obou kapitolách (III a IV) jsou diskutovány pouze případy rovinného přetvoření. Ačkoliv byla Cagniardova metoda i metoda zobecněného paprsku původně vyvinuta pro třírozměrnou tranzientní odezvu symetrickou okolo osy (osově symetrická odezva), dvourozměrná analýza uvedená v kapitolách III a IV je daleko jednodušší a ilustruje všechny podstatné body metod. Navíc dvourozměrné problémy jsou samy o sobě zajímavé v aplikované mechanice. Analogie mezi problémy rovinného přetvoření a rovinné napjatosti umožňuje provést experimenty s tenkou fólií místo objemného vrstevnatého modelu (White, 1965).

V kapitole V jsou diskutovány osově symetrické tranzientní odezvy. V této a předchozí kapitole je uvedena Cagniardova metoda ve své původní podobě. Od publikování Cagniardovy monografie v roce 1939 vzniklo množství modifikací této metody. Avšak, opomeneme-li mnohé, hlavním bodem metody je transformace integrační proměnné ve fázové funkci do jiné proměnné v komplexní rovině a transformace nové proměnné zpátky do počáteční proměnné stejným zobrazením. Díky této geniální transformaci je možno analyzovat tranzientní vlny ve vícevrstevném prostředí a v prostředí ohraničeném cylindrickými a sférickými plochami. Z tohoto důvodu je zde této metodě věnován (kapitoly IV a V) značný prostor.

Kapitola VI uvádí obecná řešení pro tranzientní vlny generované bodovým zdrojem (včetně koncentrované síly působící šikmo k povrchu vrstvy), dvěma silami na jedné nositelce, středem rotace, dvojicí sil a dvěma dvojicemi sil bez momentu. Posledně zmíněný zdroj je často používán k popisu posunu zlomu, jímž se generují seismické vlny. V akustické emisi může modelování defektů nebo trhlin ve struktuře materiálu vyžadovat superpozici několika zdrojových funkcí.

Teorie zobecněného paprsku je nejefektivnější při analýze signálů, které přicházejí do přijímače nejdříve, poněvadž počet paprskových integrálů se s prodlužující dobou pozorování obrovsky zvětšuje. Paprskové integrály mohou být v případě zdrojových signálů, které jsou časově krátké a obsahují vysoké frekvence, vypočteny přibližnými metodami; tyto metody jsou projednávány na konci VI. kapitoly.

Všeobecně zpětné transformace paprskových integrálů pro bodové zdroje jsou ve tvaru integrálů podél komplexních drah. Numerická integrace těchto integrálů je diskutována v kapitole VII. V této poslední kapitole uvedeme detailní výsledky pro dva příklady: bodový zdroj v desce a stejný zdroj ve vrstvě ležící na poloprostoru.

II. Rovnice pružnosti a jejich řešení

V této kapitole shrneme základní rovnice pružnosti a některá obecná řešení pro rovinné přetvoření a osově symetrické problémy. Uvažujeme pouze homogenní a izotropní prostředí. Nehomogenní prostředí s vrstevnatou strukturou je možno rozdělit do mnoha vrstev, z nichž každá je homogenní a izotropní. V této kapitole je dále uveden přehled řešení pro vlny generované různými typy zdrojů v neohraničeném prostředí. Ve vrstevnatém prostředí s jedním nebo několika zdroji jsou vlny generované těmito zdroji vícenásobně odrazeny a lomeny. Šíření vln ve vrstevnatém prostředí může být analyzováno buď metodou syntézy vlastních tvarů nebo metodou zobecněného paprsku. První metoda je v krátkosti shrnuta v této kapitole, druhá je hlavním tématem této zprávy.

A. Rovnice pružnosti

Výchylka u nebo rychlost $\dot{u} = \partial u / \partial t$ částice v pružném pevném tělese, která se nachází v místě $\mathbf{x}(x, y, z)$ v čase t , vyhovuje vektorové pohybové rovnici

$$(\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{F} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (2.1)$$

V této rovnici ρ je hustota materiálu a λ, μ jsou Laméovy konstanty materiálu. \mathbf{F} je hustota objemové síly. Tenzor napětí $\boldsymbol{\tau}$ v pevném tělese a \mathbf{u} jsou ve vztahu

$$\boldsymbol{\tau} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} + \mu(\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla), \quad (2.2)$$

kde \mathbf{I} je izotropní tenzor.

Rovnice (2.1) může být řešena zavedením dvou výchylkových potenciálů ϕ a Ψ a dvou potenciálů objemových sil b a \mathbf{B} , pro něž platí

$$\mathbf{u} = \nabla \phi + \nabla \times \Psi, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{F} = \nabla b + \nabla \times \mathbf{B}. \quad (2.4)$$

Původní pohybová rovnice je splněna, jestliže

$$c^2 \nabla^2 \phi + b = \ddot{\phi}, \quad c = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho} \quad (2.5)$$

$$c^2 \nabla^2 \Psi + \mathbf{B} = \ddot{\Psi}, \quad c = \sqrt{\mu/\rho} \quad (2.6)$$

C je rychlost S-vln v prostředí a

c je rychlost P-vln v prostředí.

Abychom označili odpovídající složky vektoru v kartézských souřadnicích (x, y, z) , připojíme indexy x, y a z . Tedy

$$u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_z}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_y}{\partial z}, \quad \dots \quad (2.7)$$

$$F_x = \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}, \quad \dots \quad (2.8)$$

a rovnice (2.6) se redukuje na tři skalární vlnové rovnice

$$c^2 \nabla^2 \Psi_x + B_x = \ddot{\Psi}_x, \quad \dots \quad (2.9)$$

kde

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Navíc existuje pomocná podmínka $\nabla \cdot \Psi = 0$. Složky napětí jsou

$$\tau_{zz} = \lambda \nabla^2 \phi + 2\mu \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_x}{\partial z} \right) \right], \quad \dots, \quad (2.10)$$

$$\tau_{zx} = \mu \left[2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Psi_z}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} \right) \right], \quad \dots,$$

Pro problémy v cylindrických souřadnicích (r, φ, z) může být Ψ reprezentováno dvěma nezávislými funkcemi ψ a χ ,

$$\Psi = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, -\frac{\partial \psi}{\partial r}, \chi \right), \quad (2.11)$$

kde ψ a χ jsou řešení skalárních vlnových rovnic

$$c^2 \nabla^2 \psi = \ddot{\psi}, \quad c^2 \nabla^2 \chi = \ddot{\chi}, \quad (2.12)$$

$$a \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} .$$

Složky u jsou pomocí ϕ, ψ a χ vyjádřeny následovně

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} \\ u_\varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi \partial z} - \frac{\partial \chi}{\partial r} \\ u_z &= \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Složky napětí jsou

$$\tau_{zz} = \lambda \nabla^2 \phi + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\lambda}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + 2\mu \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right] \quad (2.14)$$

$$\tau_{zr} = \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) = \mu \left[2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z} + 2 \frac{\partial^3 \psi}{\partial r \partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r \partial t^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \varphi \partial z} \right]$$

$$\tau_{z\varphi} = \mu \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right) = \mu \left[2 \frac{\partial^2 \phi}{r \partial \varphi \partial z} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial \varphi \partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial \varphi \partial t^2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial z} \right]$$

Výrazy pro $\tau_{\varphi\varphi}, \tau_{rr}$ a $\tau_{r\varphi}$ jsou zde vynechány.

U tranzientních vln se používá Laplaceova transformace vzhledem k t . Laplaceovu transformaci funkce budeme označovat vodorovnou čárkou nad funkcí a transformační parametr s

$$\bar{f}(\mathbf{x}, s) = \int_0^\infty f(\mathbf{x}, t) e^{-st} dt , \quad (2.15)$$

$$f(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} \bar{f}(\mathbf{x}, s) e^{st} ds . \quad (2.16)$$

Br označuje Bromwichovu cestu v komplexní rovině s , což je přímka rovnoběžná s imaginární osou procházející konstantním kladným reálným s .

B. Obecná řešení a zdrojové funkce

Obecná řešení pro u jsou sestavována z řešení pro skalární vlnové rovnice (2.5), (2.9) a (2.12). Předpokládejme, že na počátku jsou u i $\partial u/\partial t$ nulové. Tedy počáteční podmínky pro vlnové funkce jsou

$$\phi = \partial\phi/\partial t = 0, \quad \Psi = \partial\Psi/\partial t = 0 \quad \text{v } t=0. \quad (2.17)$$

1. Problémy rovinného přetvoření

Jestliže $u=[u_x, 0, u_z]$ a všechny veličiny popisující napěťové pole jsou nezávislé na y , jedná se o problém rovinného přetvoření. Složky výchylky jsou určeny dvěma funkcemi $\phi(x, z, t)$ a $\Psi=[0, \psi(x, z, t), 0]$.

Provedeme-li Laplaceovu transformaci rovnice (2.5) a (2.9), získáme dvě rovnice pro $\bar{\phi}(x, z, s)$ a $\bar{\psi}(x, z, s)$

$$c^2 \nabla^2 \bar{\phi} - s^2 \bar{\phi} = -\bar{b}, \quad c^2 \nabla^2 \bar{\psi} - s^2 \bar{\psi} = -\bar{B}, \quad (2.18)$$

kde $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2$. Tyto rovnice jsou redukovány na obyčejné diferenciální rovnice pomocí Fourierových transformací (Sneddon, 1951)

$$\tilde{\phi}(\xi, z, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\phi}(x, z, s) e^{-is\xi x} dx, \quad (2.19)$$

$$\bar{\phi}(x, z, s) = \frac{s}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}(\xi, z, s) e^{is\xi x} d\xi. \quad (2.20)$$

Řešení pro $\tilde{\phi}$ a $\tilde{\psi}$ jsou

$$\tilde{\phi}(\xi, z, s) = A(\xi, s) e^{-s\eta z} + B(\xi, s) e^{s\eta z} + \tilde{\phi}_0, \quad (2.21)$$

$$\tilde{\psi}(\xi, z, s) = C(\xi, s) e^{-s\zeta z} + D(\xi, s) e^{s\zeta z} + \tilde{\psi}_0.$$

kde $\tilde{\phi}_0$ a $\tilde{\psi}_0$ jsou partikulární řešení, ještě nespecifikovány; A, B, C a D jsou neznámé koeficienty; a

$$\eta = \sqrt{\xi^2 + c^{-2}}, \quad \zeta = \sqrt{\xi^2 + C^{-2}}. \quad (2.22)$$

Zpětnou Fourierovou transformací získáme

$$\bar{\phi}(x, z, s) = \bar{\phi}_0 + \frac{s}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [Ae^{-s\eta z} + Be^{s\eta z}] e^{is\xi x} d\xi, \quad (2.23)$$

$$\bar{\psi}(x, z, s) = \bar{\psi}_0 + \frac{s}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [Ce^{-s\zeta z} + De^{s\zeta z}] e^{is\xi x} d\xi.$$

Rovnice (2.23) jsou obecným řešením Laplaceových obrazů výchylkových potenciálů $\bar{\phi}$ a $\bar{\psi}$. Partikulární řešení $\bar{\phi}_0$ a $\bar{\psi}_0$ závisí na předepsané objemové síle; koeficienty A, B, C a D závisí na okrajových podmínkách. Dále jsou uvedeny tři ukázkové problémy a jejich řešení (obr.1). Podrobnosti viz dodatek II.A.

(i) Přímkový zdroj exploze v nekonečném prostředí (obr.1a)

Dosadíme v rovnici (2.18)

$$b = f(t)\delta(x)\delta(z-z_0), \quad B = [0, 0, 0] \quad (2.24)$$

$\delta(x)$ je delta funkce a $f(t)$ je časová závislost exploze, její Laplaceova transformace je $\bar{f}(s)$.

(ii) Přímková vertikální síla v nekonečném prostředí (obr.1b)

Kromě předepsání objemové síly může být tento problém řešen za předpokladu (Achenbach, 1973, str.295)

$$\text{pro } z \geq z_0, \quad \tau_{zz} = -\frac{1}{2}\delta(x)f(t) \quad \text{a} \quad u_x = 0 \quad \text{v} \quad z = z_0; \quad (2.25)$$

$$\text{pro } z \leq z_0, \quad \tau_{zz} = +\frac{1}{2}\delta(x)f(t) \quad \text{a} \quad u_x = 0 \quad \text{v} \quad z = z_0.$$

(iii) Přímková vertikální síla na povrchu poloprostoru (obr.1c)

Okrajové podmínky jsou ($z \geq 0$)

$$\tau_{zz} = -\delta(x)f(t) \quad \text{a} \quad \tau_{zx} = 0 \quad \text{v} \quad z = 0. \quad (2.26)$$

Řešení všech těchto tří problémů může být vyjádřeno jako

$$\bar{\phi}(x, z, s) = s \int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}(s) S_p(\xi) e^{s(i\xi x - \eta|z-z_0|)} d\xi, \quad (2.27)$$

$$\bar{\psi}(x, z, s) = s \int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}(s) S_v(\xi) e^{s(i\xi x - \zeta|z-z_0|)} d\xi,$$

kde S_p resp. S_v je P resp. SV-zdrojová funkce. S_p, S_v a $\bar{F}(s)$ jsou uvedeny v tabulce 1 pro každý typ zatížení.

Vynechali jsme zde případ antirovinného přetvoření $u=[0, u_y(x, z, t), 0]$. To se obvykle řeší ponecháním $\phi=0$ a $\Psi=[0, 0, \psi_z(x, z, t)]$. Na rozdíl od vertikální polarizace příčné vlny při rovinném přetvoření (SV-vlny) je v tomto případě příčná vlna polarizována horizontálně (SH-vlny). SH-vlna v cylindrických souřadnicích je probírána v kapitole VI.B.

Tabulka I

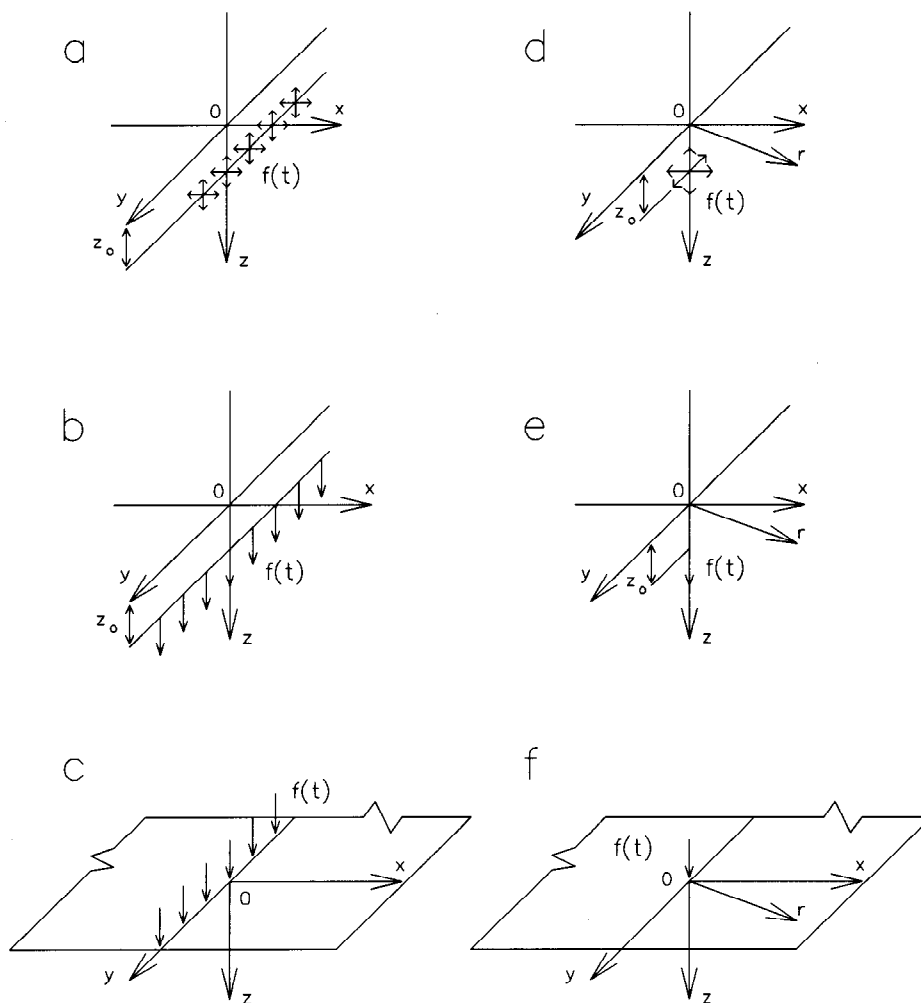
Zdrojové funkce pro přímkové nebo bodové zatížení [(2.27) a (2.35)]^a

Zdroje	$\bar{F}(s)$	$S_p(\xi)$	$S_v(\xi)^b$
Bodová nebo přímková exploze	$\frac{\bar{f}(s)}{4\pi c^2 s}$	$\frac{1}{\eta}$	0
Bodová nebo přímková vertikální síla uvnitř	$\frac{\bar{f}(s)}{4\pi \rho s^2}$	$-\epsilon$	$i\frac{\xi}{\zeta}$
Bodová nebo přímková vertikální síla na povrchu	$\frac{\bar{f}(s)}{2\pi \mu s^2}$	$\frac{\xi^2 + \zeta^2}{\Delta_r(\xi)}$	$-i\frac{2\xi\eta}{\Delta_r(\xi)}$

^{a)} $\epsilon=\pm 1$, jestliže paprsek je ve směru $\pm z$.

$$\eta = \sqrt{\xi^2 + c^{-2}}, \quad \zeta = \sqrt{\xi^2 + c^{-2}}, \quad \Delta_r(\xi) = 4\eta\zeta\xi^2 - (\xi^2 + \zeta^2)^2.$$

^{b)} Faktor i u bodového zdroje zmizí.



Obr.1 Přímkové a bodové zdroje

2. Problémy rovinné napjatosti

Uvažujme tenkou desku ohraničenou dvěma volnými povrchy $y=\pm b$. Jestliže je vybuzení takové, že převládající pohyb je v rovině x - z a symetrický okolo střední roviny $y=0$, může být vlnový pohyb v desce popsán také $\Phi(x, y, t)$ a $\psi(x, z, t)$ v rovnici (2.18). Avšak rychlost P-vlny bude nahrazena rychlostí v neomezeném dvourozměrném prostředí

$$c = \sqrt{(\bar{\lambda} + 2\mu)/\rho} \quad , \quad \bar{\lambda} = 2\lambda\mu/(\lambda + \mu) \quad . \quad (2.28)$$

Rychlost S-vlny C zůstává nezměněna.

Výchylky $[u_x, 0, u_z]$ a napětí $[\tau_{xx}, \tau_{xz}, \tau_{zz}]$, odvozené

z rovnic (2.7) a (2.10), jsou průměrné hodnoty skutečných výchylek a napětí přes tloušťku desky. Poněvadž v tomto případě $\tau_{xy} = \tau_{yy} = \tau_{yz} = 0$, což je analogické řešení rovinné napjatosti v elastostatice, nazýváme tento problém rovinná napjatost. Kvůli povaze aproximace může být teorie rovinné napjatosti aplikována, je-li frekvence vln (v Hz) v desce menší než $C/4b$ (Pao a Kaul, 1974).

S těmito znalostmi jsou řešení daná rovnicemi (2.19)-(2.27) také aplikovatelná pro vlny v tenkých deskách (Achenbach, 1973, kap. 6.12.3).

3. Osově symetrické problémy

Pro vlnový pohyb symetrický vzhledem k ose z jsou výchylky nezávislé na souřadnici φ . Kromě rotačního pohybu $u = [0, u_\varphi, 0]$ jsou výchylky $u = [u_r, 0, u_z]$ určeny ze dvou potenciálů $\phi(r, z, t)$ a $\psi(r, z, t)$ a $\chi = 0$ v rovnici (2.13), kde $\bar{\phi}$ a $\bar{\psi}$ vyhovují rovnici (2.18) s $\nabla^2 = \partial^2/\partial r^2 + (1/r)\partial/\partial r + \partial^2/\partial z^2$.

Na tyto rovnice potom aplikujeme Hankelovu transformaci, která je reprezentována (Sneddon, 1951, str. 48)

$$\hat{\phi}(\xi, z, s) = \int_0^\infty \bar{\phi}(r, z, s) J_0(s\xi r) r \, dr, \quad (2.29)$$

$$\bar{\phi}(r, z, s) = s^2 \int_0^\infty \hat{\phi}(\xi, z, s) J_0(s\xi r) \xi \, d\xi.$$

Z důvodu výhodnosti je jako parametr transformace bráno $s\xi$. Řešení pro dvakrát transformované potenciály jsou

$$\hat{\phi}(\xi, z, s) = A(\xi, s)e^{-s\eta z} + B(\xi, s)e^{s\eta z} + \hat{\phi}_0, \quad (2.30)$$

$$\hat{\psi}(\xi, z, s) = \frac{C(\xi, s)}{-s\xi} e^{-s\zeta z} + \frac{D(\xi, s)}{-s\xi} e^{s\zeta z} + \hat{\psi}_0.$$

kde η a ζ jsou definovány v rovnici (2.22); A, B, C a D jsou neznámé koeficienty. Použitím zpětné Hankelovy transformace získáme

$$\bar{\phi}(r, z, s) = \bar{\phi}_0 + s^2 \int_{-\infty}^{\infty} [Ae^{-s\eta z} + Be^{s\eta z}] J_0(s\xi r) \xi \, d\xi , \quad (2.31)$$

$$\bar{\psi}(r, z, s) = \bar{\psi}_0 + s^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-1}{s\xi} [Ce^{-s\zeta z} + De^{s\zeta z}] J_0(s\xi r) \xi \, d\xi .$$

Partikulární řešení $\bar{\phi}_0$ a $\bar{\psi}_0$ jsou opět určena z předepsaných objemových sil.

Jako v předchozí části budeme uvažovat tři typy bodových zdrojů (obr.1). Podrobnosti viz dodatek II.A.

(i) Explozivní bodový zdroj v nekonečném prostředí (obr.1d)

$$b = f(t)\delta(z-z_0)\delta(r)/2\pi r , \quad \mathbf{B} = [0, 0, 0]. \quad (2.32)$$

(ii) Bodová vertikální síla v nekonečném prostředí (obr.1e)

$$\text{pro } z \geq z_0, \quad \tau_{zz} = -\frac{1}{2}f(t)\delta(r)/2\pi r \quad \text{a} \quad u_r = 0 \quad \text{v } z=z_0 ; \quad (2.33)$$

$$\text{pro } z \leq z_0, \quad \tau_{zz} = +\frac{1}{2}f(t)\delta(r)/2\pi r \quad \text{a} \quad u_r = 0 \quad \text{v } z=z_0 .$$

(iii) Bodová vertikální síla na povrchu poloprostoru (obr.1f)

$$\tau_{zz} = -f(t)\delta(r)/2\pi r \quad \text{a} \quad \tau_{zr} = 0 \quad \text{v } z=0 . \quad (2.34)$$

Laplaceovy transformace těchto řešení jsou

$$\bar{\phi}(r, z, s) = s^2 \int_0^{\infty} \bar{F}(s) S_p(\xi) e^{-s\eta|z-z_0|} J_0(s\xi r) \xi \, d\xi , \quad (2.35)$$

$$\bar{\psi}(r, z, s) = s^2 \int_0^{\infty} \bar{F}(s) S_v(\xi) e^{-s\zeta|z-z_0|} J_0(s\xi r) \xi \, d\xi .$$

Zdrojové funkce S_p a S_v v předchozích rovnicích jsou stejné jako zdrojové funkce při rovinném přetvoření (tab.I).

Tři problémy zde uvedené jsou klasické problémy elasto-

dynamiky a jsou uváděny v mnoha pracech (např. Achenbach, 1973). Zpětná Laplaceova transformace řešení (rovnice (2.27) a (2.35)) může být provedena Cagniardovou metodou, kterou probereme později.

4. Asymetrické problémy

Jestliže zatížení působící na vrstevnaté prostředí není ani symetrické vzhledem k rovině $x-y$ (rovinné problémy) ani symetrické k ose z (osově symetrický problém), jsou řešení dosti komplikovaná. Diskusi těchto řešení proto odložíme až do kapitoly VI.

C. Teorie vlastních tvarů

Složitost řešení se zvětšuje s rostoucím počtem okrajových podmínek. Uvažujme například problém rovinného přetvoření vrstvy pokrývající poloprostor (Newlands, 1952). Na volném povrchu $z=0$ (viz obr.12 v kap.V) mohou být okrajové podmínky buď "bez napětí" ($\tau_{zz} = \tau_{zx} = 0$) nebo stejné jako okrajové podmínky dané rovnicí (2.26). Na rozhraní $z=h$ existují dvě podmínky spojitosti výchylek ($u_{x1} = u_{x2}$, $u_{z1} = u_{z2}$) a dvě pro napětí ($\tau_{zz1} = \tau_{zz2}$, $\tau_{zx1} = \tau_{zx2}$). Číselné indexy odlišují vrstvu 1 od poloprostoru 2. Navíc mohou být zdroje uvnitř vrstvy nebo poloprostoru. Celkově šesti okrajovým podmínkám musí být vyhověno při tomto problému.

Řešení jsou získána konstrukcí čtyř vlnových funkcí $\bar{\phi}_1, \bar{\psi}_1, \bar{\phi}_2$ a $\bar{\psi}_2$, které jsou dány rovnicí (2.23). Šest konstant A_1, B_1, C_1, D_1 a A_2, C_2 ($B_2 = D_2 = 0$) může být potom určeno z šesti okrajových podmínek (Ewing a kol., 1957, str.189). Pomineme-li zde všechny detaily, vyjádříme tato řešení symbolicky následujícími vztahy

$$\begin{aligned} A_1 &= \Delta_A / \Delta, & B_1 &= \Delta_B / \Delta, & C_1 &= \Delta_C / \Delta, & D_1 &= \Delta_D / \Delta, \\ A_2 &= \delta_A / \Delta, & C_2 &= \delta_C / \Delta. \end{aligned} \quad (2.36)$$

kde $\Delta_A, \dots, \Delta_D, \delta_A, \delta_C$ a Δ jsou determinanty 6×6 . Po rozvinutí

determinantu Δ může být společný jmenovatel vyjádřen jako (Pekeris a kol., 1965, rovnice 33 a 110)

$$\begin{aligned} \Delta(s\xi, s) = & e^{s(\eta_1 + \zeta_1)h} [R_{PP}^{PP} (R_{PP} e^{-2s\eta_1 h} - R_{SS} e^{2s\zeta_1 h}) \\ & + (R_{PP} R_{SS} - R_{SP} R_{PS}) e^{-2s(\eta_1 + \zeta_1)h} \\ & + 2R_{PS}^{SP} R_{PS} e^{-s(\eta_1 + \zeta_1)h} - 1 \end{aligned} \quad (2.37)$$

V předchozí rovnici $\eta_1 = \sqrt{\xi^2 + c_1^{-2}}$ a $\zeta_1 = \sqrt{\xi^2 + c_1^{-2}}$. R^{PP} a R^{SP} jsou koeficienty odrazu rovinných vln (P-mód na P-mód a S-mód na P-mód) na volném povrchu [(3.11)], kdežto R_{PP}, \dots, R_{SS} jsou koeficienty odrazu rovinných vln na dolním povrchu [(3.9)].

Nahradíme-li v rovnici (2.37) $s\xi \rightarrow k$ a $s \rightarrow j\omega$, dostáváme

$$\Delta(k, \omega) = 0 \quad , \quad (2.38)$$

což je frekvenční rovnice pro Rayleighovu vlnu v horní vrstvě. Kořeny této transcendentní rovnice určují disperzní vztah mezi vlnovým číslem k a frekvencí ω nebo fázovou rychlostí ω/k (Ewing a kol., 1957, str.195). Každá dvojice čísel (ω, k) představuje vlastní tvar Rayleighovy vlny.

U prostředí s mnoha vrstvami mohou být koeficienty Δ_A, \dots , a Δ určeny maticovou metodou (Thomson, 1950; Haskell, 1953). Další podrobnosti o této metodě jsou obsaženy v článcích Gilberta a Backuse (1966) a Richardse (1971).

Substitucí rovnice (2.36) a (2.37) do rovnice (2.23) a provedením zpětné Laplaceovy transformace dostaneme

$$\phi(x, z, t) = \phi_0 + \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} ds e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi \Delta} [\Delta_A e^{-\alpha_1 z} + \Delta_B e^{\alpha_1 z}] e^{ikx} dk \quad , \quad (2.39)$$

$$\psi(x, z, t) = \psi_0 + \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} ds e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi \Delta} [\Delta_C e^{-\beta_1 z} + \Delta_D e^{\beta_1 z}] e^{ikx} dk \quad ,$$

kde

$$\alpha_1 = s\eta_1 = \sqrt{k^2 + s^2/c_1^2} \quad , \quad \beta_1 = s\zeta_1 = \sqrt{k^2 + s^2/c_1^2}$$

a $s\xi$ bylo změněno na k .

Konečná řešení jsou ve tvaru dvojného integrálu [(2.39)]. Změnou pořadí integrace budeme vyhodnocovat jako první s integrál výpočtem residuí

$$\phi(x, z, t) = \phi_0 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{\partial \Delta}{\partial s} \right)^{-1} \left(\Delta_A e^{-\alpha_1 z} + \Delta_B e^{\alpha_1 z} \right) e^{st} \right]_{s=\pm i\omega_n} dk \quad (2.40)$$

$\omega_n(k)$ jsou frekvence vlastních tvarů a $s=\pm i\omega_n$ jsou jednoduché póly v komplexní rovině s . Podobný výraz získáme pro $\psi(x, z, t)$. Zbývající integraci přes k můžeme provést numericky (FFT) nebo asymptoticky metodou stacionární fáze.

Analýza vlastních tvarů, která byla nyní načrtnuta, byla aplikována na prostředí s mnoha vrstvami (Harkider, 1964, 1970; Fuchs, 1966; Dunkin a Corbin, 1970). Numerická práce spojená s touto analýzou je dlouhá a obtížná; metoda je efektivnější pro dlouhé časy ve vzdálených místech pozorování. Z tohoto důvodu je žádoucí jiný způsob analýzy.

Newlands (1952) vyhodnocoval tyto dvojně integrály Bromwichovým rozvojem a Sommerfeldovou změnou integrační cesty. Bromwichův rozvoj obsahuje rozvoj Δ^{-1} z rovnice (2.39) v nekonečné řady. Každý člen v řadách představuje paprskový integrál, který je potom vyhodnocen pomocí Sommerfeldovy metody. Byl to Bromwich (1916), který ukázal na jednorozměrném problému, že rozvoj v záporné mocniny exponenciál představuje pohyb rozložený do řady pulsů [viz dodatek II.B].

D. Vývoj teorie zobecněného paprsku

V teorii geometrické optiky je světelný paprsek definován jako ortogonální trajektorie k vlnovým čelům. Intenzita světla podél dráhy paprsku může být určena z asymptotického řešení vlnových rovnic pro vysoké frekvence (Born a Wolf, 1975). Toto se někdy nazývá paprskovou teorií optiky.

Obecné řešení pro vlny v ohraničeném prostředí bez aplikace asymptotické analýzy může být roztrženo do mnoha částí Bromwichovým nebo jemu podobným rozvojem, každá část odpovídá vlnám putujícím podél paprskové dráhy. V literatuře je toto známé též jako paprsková teorie, ale je to něco zcela odlišného od paprskové teorie geometrické optiky. Tato paprsková teorie byla vyvinuta dříve Debyem (1909) pro zkoumání ohybu světla a později Van der Polem a Bremmerem (1937) k výpočtu ohybu radiových vln. Jejich analýzy počítaly pouze s monochromatickými vlnami.

Teorie vlastních tvarů a paprsková teorie byla využita Pekerisem začátkem 40. let na problémy šíření zvuku pod vodou. Jeho analýzy zvukových pulsů ve dvou- a třívrstevných kapalinách byly později uveřejněny v memoárech (Ewing a kol., 1948); integrály založené na teorii vlastních tvarů byly vyhodnoceny metodou stacionární fáze. Paprskové integrály byly vyhodnoceny daleko později (Pekeris a Longman, 1958; Pekeris a kol., 1959).

Tyto paprskové integrály pro tranzientní vlny byly vypočteny pomocí tzv. Cagniardovy metody, metody, ke které Pekeris (1940) také přispěl. Historický význam Cagniardovy metody je uveden v předmluvě k anglickému překladu Cagniardovy monografie (1939) napsané Flinnem a Dixem v roce 1962.

Pro vlny v pružných pevných tělesech bylo použito paprskové teorie a Cagniardovy metody pro určení tranzientní odezvy desky (Mencher, 1953; Knopoff, 1958a; Davids a Lawhead, 1965) a tranzientních Loveho vln ve vrstvě (Knopoff, 1958b; Pekeris a kol., 1963). Obtížnější problém tranzientních Rayleighových vln ve vrstvě byl řešen Knopoffem a kol. (1960) a Pekerisem a kol. (1965).

Ve všech výše citovaných pracích jsou paprskové integrály odvozeny z Bromwichova rozvoje přesných řešení pro vlny ve vrstevnatém prostředí. Jak je ukázáno v rovnici (2.37), takový rozvoj vyžaduje vyhodnocení determinantu 6×6 pro dvouvrstvé pevné těleso (vrstva nanosená na poloprostor).

Velikost determinantu se zvětší na 10×10 pro vlny v třívrstevném pevném tělese s osovou symetrií a na 15×15 , jestliže jde o nesymetrickou úlohu. Tento Bromwichův rozvoj, který je základem paprskové teorie, se stává překážkou při použití paprskové teorie v prostředí s mnoha vrstvami.

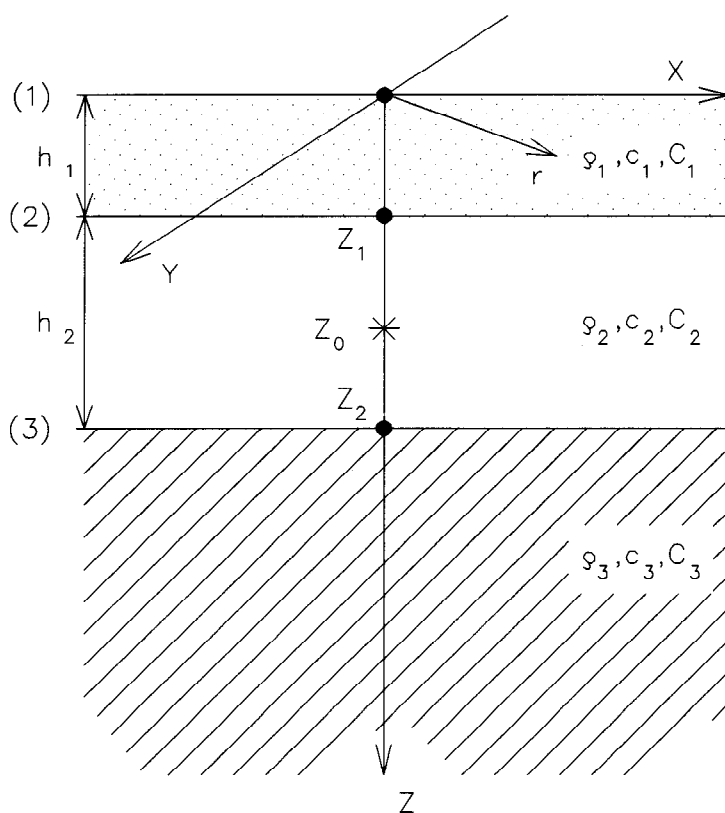
Publikování třech článků Spencera (1960, 1965a,b) konečně tuto překážku odstranilo. Spencer zavedl bez pomoci Bromwichova rozvoje pojem zobecněných paprskových drah a ukázal, jak lze sestavit paprskový integrál přímo ze známých zdrojových funkcí a koeficientů odrazu a přestupu pro rovinné vlny podél každé dráhy. Poněvadž mohou být paprskové integrály vyhodnoceny Cagniardovou metodou a řešení je přesné až do okamžiku příchodu následujícího paprsku, je tato teorie Spencerem nazývána "přesná paprsková teorie pružnosti". Avšak v pozdějších publikacích převládá název "zobecněná paprsková teorie".

Teorie byla použita Berrym a Westem (1966) pro analýzu vln ve vrstevnatém prostředí. Obsáhlé pojednání o této teorii včetně numerických příkladů napsal Müller (1968, 1969). Ve svých pracech využil Fourierovu transformaci časové proměnné a modifikovanou Cagniardovu metodu vyvinutou Bortfeldem (1962). Novější literatura o této metodě je uvedena v článku Chapmana (1976b).

III. Teorie zobecněného paprsku

Jak bylo uvedeno v předchozí kapitole, jsou obecná řešení Laplaceových obrazů potenciálů pro homogenní vrstvu dána rovnicemi (2.23) a (2.31). Ke každé fyzikální veličině přidáme index i ($i=1,2,3,\dots$) označující i -tou vrstvu.

Uvažujme prostředí složené ze tří vrstev, tloušťka nejnižší vrstvy je nekonečná. Přímkový zdroj je ve vrstvě 2 (obr.2). Jedná se tudíž o problém rovinného přetvoření a všechny proměnné popisující pole napjatosti jsou nezávislé na y -ové souřadnici.



Obr.2 Geometrie třívrstvého prostředí

Koeficienty A_i, B_i, C_i, D_i ($i=1,2,3$) jsou určeny ze zdrojových funkcí v rovnicích (2.27) a okrajovými podmínkami na rozhraních :

$$(\tau_{zx})_1 = (\tau_{zz})_1 = 0 \quad \text{pro } z=0, \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} (\tau_{zx})_i &= (\tau_{zx})_{i+1}, & (\tau_{zz})_i &= (\tau_{zz})_{i+1} \\ & & & (i=1,2) \text{ pro } z=z_i \\ (u_x)_i &= (u_x)_{i+1}, & (u_z)_i &= (u_z)_{i+1} \end{aligned}$$

Pro třívrstvé prostředí existuje celkem deset neznámých koeficientů a deset okrajových podmínek ($B_3=D_3=0$).

Namísto určování těchto koeficientů ze soustavy deseti nezávislých rovnic a následného použití Bromwichova rozvoje pro setřídění jednotlivých paprsků budeme sestavovat paprskové integrály metodou zobecněného paprsku (Knopoff a kol, 1960; Spencer, 1960). Zpětná transformace těchto paprskových integrálů je probírána v následující kapitole.

A. Základní princip

1. Odraz a prostup cylindrických vln

Uvažujme přímkový zdroj ve vrstvě 2. Všude v této kapitole uvažujeme pouze emitování P-vlny ze zdroje, které je podle rovnice (2.27) reprezentováno $\bar{\psi}_0=0$ a

$$\bar{\phi}_0(x, z, s) = s\bar{F}(s) \int_{-\infty}^{\infty} S_{P2} e^{s(i\xi x - \eta_2 |z-z_0|)} d\xi, \quad (3.2)$$

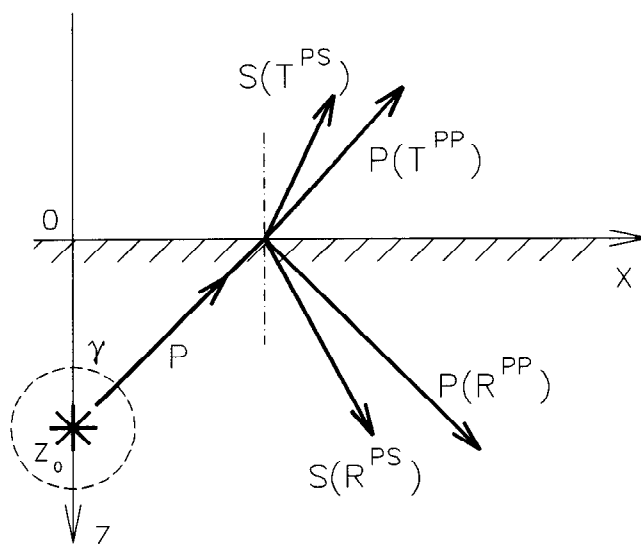
kde

$$\eta_i = \sqrt{\xi^2 + c_i^{-2}}, \quad \zeta_i = \sqrt{\xi^2 + c_i^{-2}} \quad (i=1, 2, 3),$$

a $\bar{F}(s)$ a S_p jsou dány v tabulce I.

Řešení reprezentuje cylindrickou vlnu s osou rovnoběžnou s osou y , která se šíří fázovou rychlostí c_2 ze zdroje v $z=z_0$. Přirozeně tato cylindrická vlna může být považována za superpozici rovinných vln, které procházejí zdrojem současně ve všech směrech. Laplaceova transformace rovinné vlny $f[t-(mx+nz)/c]$ je $\bar{f}(s)\exp[-(s/c)(mx+nz)]$, m a n jsou

směrové kosiny vlnové normály a $m^2+n^2=1$. Změnou proměnné m na $-i\xi c$ dostaneme $\bar{f}(s)\exp[s(i\xi x-\eta z)]$. Jestliže každé rovinné vlně je přiřazena amplituda $S_{p_2}(\xi)$ a rovinné vlny ve všech směrech jsou zintegrovány přes ξ , dostaneme cylindrickou vlnu. Jestliže rovinná vlna narazí na rozhraní dvou pevných těles (obr.3), jsou dvě rovinné vlny P a S odraženy do zdrojového prostředí (prostředí 2) a dvě prostupují do přilehlého prostředí (prostředí 1).



Obr.3 Odraz a vstup rovinné vlny na rozhraní

Nechť poměry výchylkových potenciálů pro odražené vlny k potenciálům dopadajících vln jsou R^{PP}, R^{PS} (P-vlna se odráží jako P- nebo S-vlna) a R^{SP}, R^{SS} (S-vlna se odráží jako P- nebo S-vlna). Podobně poměry pro prostupující vlny jsou označeny T^{PP}, T^{PS}, T^{SP} a T^{SS} . Tyto koeficienty odrazu a přestupu, které jsou obvykle dány jako funkce úhlu dopadu a úhlu odrazu či lomu (Ewing a kol., 1957), mohou být vyjádřeny pomocí vlnových "pomalostí" ξ, η_1 a ζ_1 [(3.9)]. Proto jsou pro dopadající cylindrickou vlnu $\bar{\phi}_0$ získány dilatační resp. příčné části odražené vlny v prostředí 2 superpozicí všech odražených rovinných P-vln resp. S-vln

$$\bar{\phi}_2 = s\bar{F}(s) \int_{-\infty}^{\infty} S_{P_2}(R^{PP}) e^{s(i\xi x - \eta_2 z - \eta_2 z_0)} d\xi, \quad (3.3)$$

$$\bar{\psi}_2 = s\bar{F}(s) \int_{-\infty}^{\infty} S_{P_2}(R^{PS}) e^{s(i\xi x - \zeta_2 z - \eta_2 z_0)} d\xi.$$

Celková vlna ve zdrojovém prostředí je $\bar{\phi}_0 + \bar{\phi}_2$ a $\bar{\psi}_2$. Podobně dvě prošlé vlny v prostředí 1 jsou

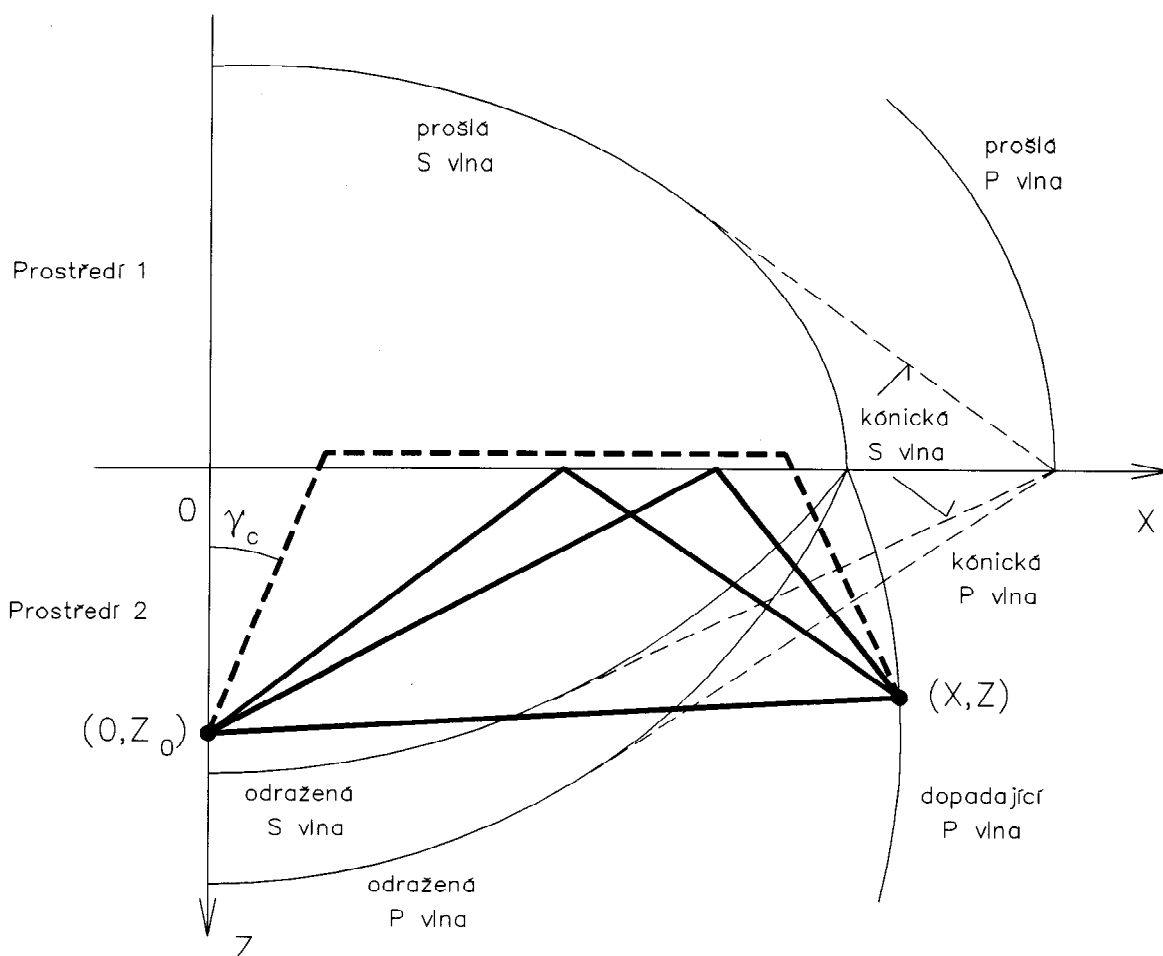
$$\bar{\phi}_1 = s\bar{F}(s) \int_{-\infty}^{\infty} S_{P_2}(T^{PP}) e^{s(i\xi x + \eta_1 z - \eta_2 z_0)} d\xi, \quad (3.4)$$

$$\bar{\psi}_1 = s\bar{F}(s) \int_{-\infty}^{\infty} S_{P_2}(T^{PS}) e^{s(i\xi x + \zeta_1 z - \eta_2 z_0)} d\xi.$$

Každý integrál v rovnicích (3.2) až (3.4), který je superpozicí všech rovinných vln, se nazývá "paprsek". Tedy $\bar{\phi}_0$ je "dopadající paprsek" neboli "zdrojový paprsek", $\bar{\phi}_2$ (P-vlna na P-vlnu) a $\bar{\psi}_2$ (P-vlna na S-vlnu) jsou "odražené paprsky" a $\bar{\phi}_1$ a $\bar{\psi}_1$ "prošlé paprsky". Spencer (1960) ukázal, že takto sestavená řešení opravdu vyhovují okrajovým podmínkám na rozhraní. Koeficienty R^{PP} resp. R^{PS} spolu s faktorem $s\bar{F}(s)S_{P_2} \exp(-s\eta_2 z_0)$ nahrazují koeficienty A_2 resp. C_2 v rovnici (2.23). Podobně T^{PP} resp. T^{PS} nahrazují B_1 resp. D_1 . Vzhledem k obr.3 koeficienty B_2 a D_2 v rovnici (2.23) zmizí, neboť z-ová osa je v prostředí 2 neomezená, a A_1 , C_1 jsou nulové, neboť prostředí 1 je neohrazené ve směru -z.

Pro každý paprsek mezi zdrojem $(0, z_0)$ a přijímačem (x, z) existuje dráha minimálního času. Poněvadž se vlna šíří konečnou rychlostí, nebude v přijímači detekován žádný signál před touto minimální dobou. Dráhy minimálního času pro zdrojový paprsek ($\bar{\phi}_0$) a dva odražené paprsky ($\bar{\phi}_2$ a $\bar{\psi}_2$) jsou znázorněny na obr.4. Odražené vlny podél různých paprskových drah (úhly se liší od úhlů znázorněných na obrázku) budou přicházet v pozdějších dobách. Avšak my víme,

že pro rovinné vlny platí, že pokud úhel dopadu překračuje kritický úhel γ_c a jsou-li fázové rychlosti v přilehlém prostředí vyšší než rychlosti ve zdrojovém prostředí, prostupující vlna se (totálně) láme a pohybuje se podél rozhraní vyšší fázovou rychlostí. Kónické vlny pohybující se podél této "lomené paprskové dráhy" mohou přijít dříve než vlny odpovídající přímo odraženým paprskovým drahám. Lomený P-paprsek (P-vlna podél rozhraní) je na obr.4 znázorněn také (čárkovaná čára); $\gamma_c = \sin^{-1}(c_2/c_1)$. Existence tohoto "lomeného paprsku" závisí na poměru rychlostí obou prostředí, hloubce zdroje a přijímače a horizontální vzdálenosti mezi nimi. Výpočty minimální doby příchodu pro přímý i lomený paprsek budou probírány v kapitole IV.



Obr.4 Dopadající, odražené a lomené vlny a paprsky
 $(c_1 > c_2 > c_1 > c_2)$

2. Přijímací funkce

Jakmile jsou potenciály $\bar{\phi}$ a $\bar{\psi}$ sestaveny pro vlny podél každého paprsku, můžeme vypočítat výchylku resp. napětí podle rovnic (2.7) resp. (2.10). Například výchylky vyvolané odraženými PP- a PS-paprsky jsou

$$\begin{aligned}\bar{u}_{x_2} &= s\bar{F}(s) \int_{-\infty}^{\infty} sS_{P_2} R^{PP} e^{-s(\eta_2 z_0 + \eta_2 z) + is\xi x} (i\xi) d\xi \\ &+ s\bar{F}(s) \int_{-\infty}^{\infty} sS_{P_2} R^{PS} e^{-s(\eta_2 z_0 + \zeta_2 z) + is\xi x} (\zeta_2) d\xi , \\ \bar{u}_{z_2} &= s\bar{F}(s) \int_{-\infty}^{\infty} sS_{P_2} R^{PP} e^{-s(\eta_2 z_0 + \eta_2 z) + is\xi x} (-\eta_2) d\xi \\ &+ s\bar{F}(s) \int_{-\infty}^{\infty} sS_{P_2} R^{PS} e^{-s(\eta_2 z_0 + \zeta_2 z) + is\xi x} (i\xi) d\xi .\end{aligned}\tag{3.5}$$

Podobně výchylky v prostředí 1 vyvolané prošlými PP- a PS-paprsky jsou

$$\begin{aligned}\bar{u}_{x_1} &= s\bar{F}(s) \int_{-\infty}^{\infty} sS_{P_2} T^{PP} e^{-s(\eta_2 z_0 - \eta_1 z) + is\xi x} (i\xi) d\xi \\ &+ s\bar{F}(s) \int_{-\infty}^{\infty} sS_{P_2} T^{PS} e^{-s(\eta_2 z_0 - \zeta_1 z) + is\xi x} (-\zeta_1) d\xi , \\ \bar{u}_{z_1} &= s\bar{F}(s) \int_{-\infty}^{\infty} sS_{P_2} T^{PP} e^{-s(\eta_2 z_0 - \eta_1 z) + is\xi x} (\eta_1) d\xi \\ &+ s\bar{F}(s) \int_{-\infty}^{\infty} sS_{P_2} T^{PS} e^{-s(\eta_2 z_0 - \zeta_1 z) + is\xi x} (i\xi) d\xi .\end{aligned}\tag{3.6}$$

Nehledě na parametr s , zvláštní součinitelé $i\xi$, ζ_2 , $-\eta_2$, $-\zeta_1$ a η_1 (všechny uvnitř závorek) budou označeny jako přijímací funkce pro výchylky. Tímto způsobem můžeme sestavit

vovat paprskové integrály pro libovolný typ odezvy (výchyly, rychlosti, napětí, atd.) s použitím stejných koeficientů odrazu a přestupu pro výchylkové potenciály spolu s náležitou zdrojovou funkcí a přijímací funkcí.

Poněvadž uvažujeme pouze P-zdroj, je výchylka složena ze dvou paprsků, PP a PS. Pokud by zdroj ($z=z_0$) emitoval rovněž S-vlny, existovaly by čtyři paprskové integrály (PP, PS, SP, SS). Přijímací funkce jsou však stejné pro oba zdroje P i S; mimo případ, kdy se přijímač nachází na volném povrchu nebo na rozhraní.

Jestliže se pozorovací bod nalézá na volném povrchu poloprostoru, všechny prošlé paprsky zmizí. Dále, je-li $z=0$, tři paprsky znázorněné na obr.4, zdrojový P-paprsek a odražené PP- a PS-paprsky, se spojí do jediného P-paprsku. Necháme-li $z \rightarrow 0$ v rovnici (3.5) a přičteme-li příspěvek od $\bar{\phi}_0$, dostaneme

$$\begin{aligned}\bar{u}_x(x, 0, s) &= s^2 \bar{F}(s) \int_{-\infty}^{\infty} S_p [i\xi + i\xi R^{PP} + \zeta R^{PS}] e^{s(i\xi x - \eta z_0)} d\xi, \\ \bar{u}_z(x, 0, s) &= s^2 \bar{F}(s) \int_{-\infty}^{\infty} S_p [\eta - \eta R^{PP} + i\xi R^{PS}] e^{s(i\xi x - \eta z_0)} d\xi.\end{aligned}\tag{3.7}$$

Podobně s přímkovým S-zdrojem v $z=z_0$, dostaneme pro odezvu v $z=0$, vyvolanou sjednoceným S-paprskem

$$\begin{aligned}\bar{u}_x(x, 0, s) &= s^2 \bar{F}(s) \int_{-\infty}^{\infty} S_v [-\zeta + i\xi R^{SP} + \zeta R^{SS}] e^{s(i\xi x - \zeta z_0)} d\xi, \\ \bar{u}_z(x, 0, s) &= s^2 \bar{F}(s) \int_{-\infty}^{\infty} S_v [i\xi - \eta R^{SP} + i\xi R^{SS}] e^{s(i\xi x - \zeta z_0)} d\xi.\end{aligned}\tag{3.8}$$

Ve výše uvedených rovnicích jsme vynechali index 2 u S, η a ζ .

Veličiny uvnitř hranatých závorek rovnic (3.7) a (3.8) budeme nazývat "povrchové přijímací funkce" pro sjednocený paprsek. Pro rychlejší orientaci jsou shrnuty přijímací

funkce pro výchylky a napětí v tabulce II.

Tabulka II

Přijímací funkce pro rovinné přetvoření [D v rovnici (3.18)]

Výchylka nebo napětí	q	P vlna	S vlna
Přijímač uvnitř			
\bar{u}_z	1	$-\varepsilon\eta$	$i\xi$
\bar{u}_x	1	$i\xi$	$\varepsilon\zeta$
$\bar{\tau}_{zz}$	2	$\mu(\zeta^2 + \xi^2)$	$-2\mu\varepsilon(i\xi)\zeta$
$\bar{\tau}_{xx}$	2	$\mu(\zeta^2 - \xi^2 - 2\eta^2)$	$2\mu\varepsilon(i\xi)\zeta$
$\bar{\tau}_{zx}$	2	$-2\mu\varepsilon(i\xi)\eta$	$-\mu(\zeta^2 + \xi^2)$
Přijímač na volném povrchu $z=0$ ($\varepsilon=-1$) a na dně ($\varepsilon=1$)			
\bar{u}_z	1	$-\varepsilon\eta + \varepsilon\eta R^{PP} + i\xi R^{PS}$	$i\xi + \varepsilon\eta R^{SP} + i\xi R^{SS}$
\bar{u}_x	1	$i\xi + i\xi R^{PP} - \varepsilon\zeta R^{PS}$	$\varepsilon\zeta + i\xi R^{SP} - \varepsilon\zeta R^{SS}$

B. Koeficienty odrazu a přestupu

Koeficienty odrazu a přestupu v předchozích rovnicích jsou stejné jako koeficienty pro rovinné P- a SV-vlny (Ewing a kol., 1957, str. 87) :

$$\begin{aligned}
 R^{PP} &= [(\ell_1 - \ell_3)(m_2 + m_4) - (m_1 - m_3)(\ell_2 + \ell_4)]\Delta^{-1}, \\
 R^{PS} &= i\varepsilon 2(\ell_2 m_4 - \ell_4 m_2)\Delta^{-1}, \\
 T^{PP} &= 2(m_2 + m_4)\Delta^{-1}, \quad T^{PS} = i\varepsilon 2(\ell_2 + \ell_4)\Delta^{-1}, \\
 R^{SP} &= \varepsilon 2(m_3 \ell_1 - m_1 \ell_3)(i\Delta)^{-1}, \\
 R^{SS} &= [(\ell_2 - \ell_4)(m_1 + m_3) - (m_2 - m_4)(\ell_1 + \ell_3)]\Delta^{-1}, \\
 T^{SP} &= \varepsilon 2(m_1 + m_3)(i\Delta)^{-1}, \quad T^{SS} = 2(\ell_1 + \ell_3)\Delta^{-1},
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

kde

$$\Delta = (\ell_1 + \ell_3)(m_2 + m_4) - (\ell_2 + \ell_4)(m_1 + m_3) .$$

Prvky $\ell_1, \ell_2, \dots, m_3, m_4$ mohou být vyjádřeny pomocí smykových modulů μ_j a ξ, η_j, ζ_j , jak jsou definovány v rovnici (3.2), kde index j ($=1, 2$) je připojen z důvodu rozlišení zdrojového (2) a přilehlého prostředí (1)

$$\begin{aligned} \ell_1 &= c_2^2 [\bar{\mu}(\xi^2 + \zeta_1^2) - 2\xi^2], & \ell_2 &= c_2^2 (\xi/\zeta_2) [\bar{\mu}(\xi^2 + \zeta_1^2) - (\xi^2 + \zeta_2^2)], \\ \ell_3 &= c_2^2 (\eta_1/\eta_2) [\xi^2 + \zeta_2^2 - 2\bar{\mu}\xi^2], & \ell_4 &= c_2^2 (2\xi\eta_1)(1 - \bar{\mu}), \\ m_1 &= -c_2^2 (2\xi\zeta_1)(\bar{\mu} - 1), & m_2 &= c_2^2 (\zeta_1/\zeta_2) [\xi^2 + \zeta_2^2 - 2\bar{\mu}\xi^2], \\ m_3 &= -c_2^2 (\xi/\eta_2) [\xi^2 + \zeta_2^2 - \bar{\mu}(\xi^2 + \zeta_1^2)], & m_4 &= c_2^2 [\bar{\mu}(\xi^2 + \zeta_1^2) - 2\xi^2], \end{aligned} \quad (3.10)$$

kde

$$\bar{\mu} = \mu_1/\mu_2 \quad \text{a} \quad c_2^2 = \mu_2/\rho_2 .$$

Jestliže je prostředí 1 vakuum, koeficienty prostupu jsou nulové a koeficienty odrazu na volném povrchu jsou (indexy u η a ζ jsou zanedbány)

$$R^{PP} = [4\eta\zeta\xi^2 + (\xi^2 + \zeta^2)^2] \Delta_r^{-1}, \quad R^{SS} = R^{PP}, \quad (3.11)$$

$$R^{PS} = \varepsilon(i4\xi\eta)(\xi^2 + \zeta^2) \Delta_r^{-1}, \quad R^{SP} = \varepsilon 4\xi\zeta(\xi^2 + \zeta^2)(i\Delta_r)^{-1},$$

kde

$$R^{SS} = [(\ell_2 - \ell_4)(m_1 + m_3) - (m_2 - m_4)(\ell_1 + \ell_3)] \Delta^{-1},$$

Koeficienty odrazu a přestupu z rovnic (3.9) a (3.11), které popisují konverzi módu, ($R^{PS}, R^{SP}, T^{PS}, T^{SP}$) obsahují směrový činitel ε , který je +1 nebo -1 podle toho, zda se dopadající vlna šíří ve směru osy +z nebo -z. Znaménka u koeficientů zachovávajících mód (R^{PP}, R^{SS}, T^{PP} a T^{SS}) zůstávají nezměněna.

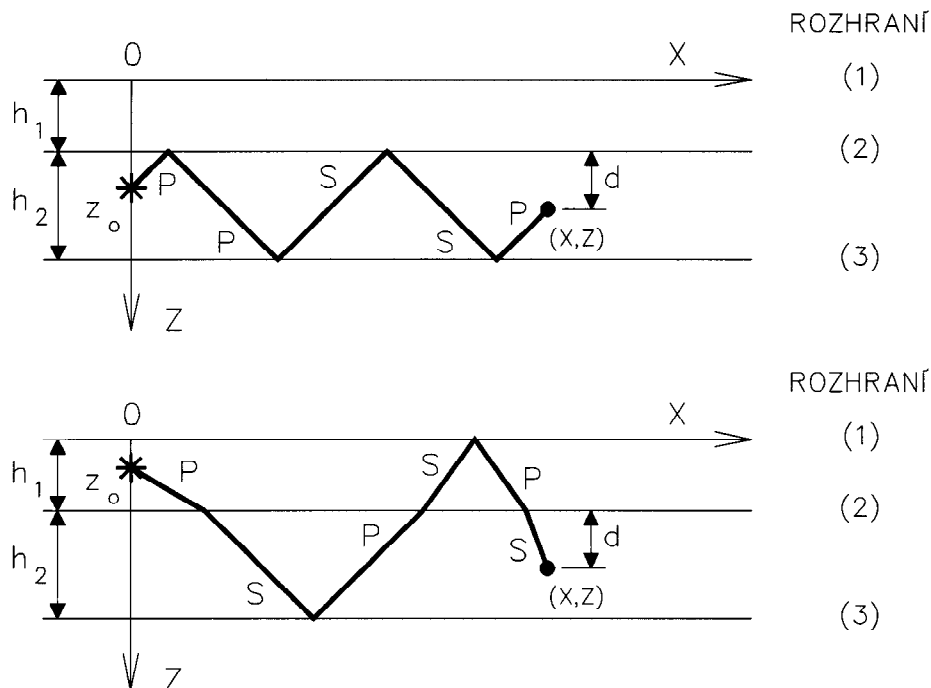
Poznamenejme, že všechny prvky ℓ_i, m_i jsou buď reálné sudé funkce ξ nebo reálné liché funkce ξ , je-li ξ reálná proměnná. Tedy pro reálné ξ jsou všechny koeficienty zacho-

vávající mód reálné sudé funkce ξ a všechny koeficienty měnicí mód jsou imaginární liché funkce ξ .

C. Přijímací funkce a zobecněné paprsky

Ve vícevrstvěm pevném tělese procházejí vlny vyzařované zdrojem řadou odrazů a prostupů, než dosáhnou přijímače. Zobecněná paprsková cesta, která spojuje zdroj a přijímač, může být sestavena z vertikální vzdálenosti pro každý mód vlny (P- nebo S-vlna) ve všech vrstvách, celkové horizontální vzdálenosti a směru šíření. S každým odrazem nebo prostupem se mění amplitudy složek rovinných vln podle odpovídajících koeficientů odrazu nebo přestupu. Tedy pro vícenásobně odraženou a prošlou cylindrickou vlnu můžeme určit výslednou odezvu podle stejných pravidel, jaká byla použita při odvození rovnic (3.5) a (3.6).

Dva příklady zobecněných paprskových drah jsou znázorněny na obr.5. Laplaceovy transformace paprskových integrálů pro každý příklad jsou uvedeny dále ($d=z-h$).



Obr. 5 Cesty zobecněných paprsků:

- a) přímkový zdroj ve vrstvě 2, P-vlna do přijímače;
- b) přímkový zdroj ve vrstvě 1, S-vlna do přijímače.

Příklad A:

Přímkový zdroj ve vrstvě 2, přijímač ve vrstvě 2 (P-vlna)

$$\bar{u}_x = s^2 \bar{F}(s) \int_{-\infty}^{\infty} S_{P_2} R_{(2)}^{PP} R_{PS}^{(3)} R_{(2)}^{SS} R_{SP}^{(3)}(i\xi) e^{sg(x,z;\xi)} d\xi ,$$

$$g(x,z;\xi) = i\xi x - [\eta_2(z_0 - h_1 + h_2) + 2\zeta_2 h_2 + \eta_2(h_2 - d)]$$

$$\bar{u}_z = \text{nahrad' přijímací funkci } (i\xi) \text{ v integrálu } (\eta_2) \quad (3.12)$$

Poněvadž první segment je v P-módu a zbývající mohou být v P- nebo S-módu, existuje celkově $1 \times 2^4 = 16$ paprskových integrálů pro všechny kombinace módů podél této cesty, osm příchodů P-vln a osm příchodů S-vln.

Příklad B:

Přímkový zdroj ve vrstvě 1, přijímač ve vrstvě 2 (S-vlna)

$$\bar{u}_x = s^2 \bar{F}(s) \int_{-\infty}^{\infty} S_{P_1} T_{PS}^{(2)} R_{SP}^{(2)} T_{(2)}^{PS} R_{(1)}^{SP} T_{PS}^{(2)}(\zeta_2) e^{sg(x,z;\xi)} d\xi ,$$

$$g(x,z;\xi) = i\xi x - [\eta_1(h_1 - z_0) + \zeta_2 h_2 + \eta_2 h_2 + \zeta_1 h_1 + \eta_1 h_1 + \zeta_2 d]$$

$$\bar{u}_z = \text{nahrad' přijímací funkci } (\zeta_2) \text{ v integrálu } (i\xi) \quad (3.13)$$

Celkový počet paprskových integrálů podél této cesty je $1 \times 2^5 = 32$.

Ve výše uvedených vztazích označují čísla v závorkách připojená k R- nebo T rozhraní, na kterém došlo k odrazu nebo prostupu; PP, PS, ... označují změnu módu, horní index znamená, že dopadající vlna se šíří nahoru ($\epsilon = -1$), a dolní index znamená, že dopadající vlna se šíří dolů ($\epsilon = +1$).

Obecně Laplaceova transformace výchylek odpovídající každému zobecněnému paprsku je

$$(\bar{u}_x, \bar{u}_z) = s^2 \bar{F}(s) \int_{-\infty}^{\infty} S(\xi) \Pi(\xi) D(\xi) e^{sg(x,z;\xi)} d\xi , \quad (3.14)$$

kde

$$g(x, z; \xi) = i\xi x - \sum_j (\eta_j z_{Pj} + \zeta_j z_{Sj}). \quad (3.15)$$

Ve fázové funkci $g(x, z; \xi)$, z_{Pj} resp. z_{Sj} jsou celkové vertikální vzdálenosti (projekce na osu z) P-segmentů resp. S-segmentů v j -té vrstvě. $\bar{F}(s)$ v rovnici (3.14) je transformace časové funkce přímkového zdroje, $S(\xi)$ je zdrojová funkce, $D(\xi)$ přijímací funkce a $\Pi(\xi)$ je celkový součin koeficientů odrazu a přestupu na rozhraních, na které dopadá zobecněný paprsek.

Zdrojová funkce $S(\xi)$ může být buď P-zdroj nebo SV-zdroj, jak je udáno v tabulce I. Přijímací funkce $D(\xi)$, které závisí pouze na módu (P- nebo S-vlna) a směru (nahoru nebo dolů) posledního segmentu zobecněného paprsku, jsou vypsány v tabulce II. Pro \bar{u}_x je $D(\xi)$ imaginární a liché, je-li poslední segment P-mód, a reálné a sudé pro S-mód. Pro \bar{u}_z to platí obráceně.

Vlastnosti $\Pi(\xi)$ jsou určeny módem prvního a posledního segmentu paprsku a vlastnostmi koeficientů odrazu a přestupu. Pro reálné ξ jsou všechny koeficienty zachovávající mód (R^{PP}, R^{SS}, T^{PP} a T^{SS}) reálné sudé funkce ξ a všechny koeficienty měnící mód (R^{PS}, R^{SP}, T^{PS} a T^{SP}) imaginární liché funkce. Poněvadž první segment vyvolaný P-zdrojem je vždy P-mód, $\Pi(\xi)$ je potom reálná sudá funkce v ξ , jestliže poslední segment je P-mód (mód se zachovává); a imaginární lichá funkce, jestliže poslední segment je S-mód (mód se mění).

Důsledkem předchozí diskuse je, že pro P-zdroj je součin $S(\xi)\Pi(\xi)D(\xi)$ vždy imaginární lichou funkcí ξ pro \bar{u}_x ($-i\xi E_x$) a reálnou sudou funkcí pro \bar{u}_z (E_z). To nám umožňuje napsat rovnici (3.14) jako

$$\bar{u}_x(x, z, s) = 2s^2 \bar{F}(s) \Im \int_0^\infty \xi E_x(\xi) e^{sg(x, z; \xi)} d\xi, \quad (3.16)$$

$$\bar{u}_z(x, z, s) = 2s^2 \bar{F}(s) \Re \int_0^{\infty} E_z(\xi) e^{sg(x, z; \xi)} d\xi . \quad (3.17)$$

kde \Im a \Re označují imaginární a reálnou část, $E_x(\xi)$ a $E_z(\xi)$ označují sudé funkce ξ ; reálné, je-li reálné.

Po shrnutí je pak procedura pro odvození integrální reprezentace zobecněného paprsku je následující:

- 1) Určit dráhu paprsku spojením zdroje a přijímače rovnou (zdrojový paprsek) nebo lomenou čarou (odražený a prošlý paprsek). Pro vícenásobně odražený paprsek musí platit, vyjma obou konců, že každý segment lomené čáry musí procházet celou tloušťkou vrstvy.
- 2) Specifikovat mód (P- nebo S-mód) procházejících vln podél každého segmentu dráhy v každé vrstvě.
- 3) Určit koeficient odrazu R a koeficient přestupu T na každém rozhraní, kterého se dotkl nebo kterým prošel paprsek.
- 4) Sestavit integrand jako součin zdrojové funkce S (tab.I), koeficientů odrazu a přestupu Π [rovnice (3.9) až (3.11)], přijímací funkce D (tab.II) a fázové funkce $\exp(is\xi x - sh(\xi, z))$, kde jako v rovnici (3.15), $h(\xi, z) = \sum_j (\eta_j z_{Pj} + \zeta_j z_{Pj})$.

Konečný tvar paprskového integrálu pro výchylky nebo napětí je

$$(\bar{u}_{ij}, \bar{u}_i) = s \bar{F}(s) \int_{-\infty}^{\infty} s^q S(\xi) \Pi(\xi) D(\xi) e^{-sh(\xi, z) + is\xi x} d\xi , \quad (3.18)$$

kde mocnina q je dána též v tabulce II. Meze integrace jsou potom změněny z $(-\infty, \infty)$ na $(0, \infty)$ stejně jako v rovnicích (3.16) a (3.17).

IV. Cagniardova metoda a tranzientní vlny
vyvolané přímkovým zatížením

Abychom našli zpětnou Laplaceovu transformaci \bar{u}_x resp. \bar{u}_z reprezentovanou rovnicemi (3.16) resp. (3.17), uvažujme nejprve integrál

$$\bar{u}(s) = \int_0^{\infty} \xi E(\xi) e^{sg(x,z;\xi)} d\xi. \quad (4.1)$$

Poznamenejme, že funkce $g(\xi)$ má rozměr času. Jestliže je $g(\xi)$ nahrazeno proměnnou, řekněme $-t$, a jestliže inverzní vztah $\xi=g^{-1}(t)$ může být určen jednoznačně, potom je integrál Laplaceovou transformací funkce $\xi(t)E[\xi(t)](d\xi/dt)$. Zpětná Laplaceova transformace může být získána inspekcí. Toto je podstata Cagniardovy metody.

V literatuře nalezneme několik verzí Cagniardovy metody. Náš výklad se přidržuje Cagniardovy původní práce (1939, kap.5) a článku Garvina (1956).

Začněme zápisem fázové funkce [rovnice (3.15)] ve tvaru

$$g(x,z;\xi) = i\xi x - \sum_{j=1}^4 z_j (\xi^2 + a_j^2)^{1/2} \quad (4.2)$$

kde $a_4=1/c_2$, $a_3=1/c_2$, $a_2=1/c_1$ a $a_1=1/c_1$; z_j je celková vertikální projekce všech segmentů spojených s "pomalostí" a_j . Bez ztráty obecnosti můžeme předpokládat, že $c_2 > c_1 > c_1$. Jestliže je zdroj ve vrstvě 1 a zobecněný paprsek neprochází vrstvou 2, pak se sumace provádí pouze do 2. Na druhou stranu, jestliže paprsek přichází k přijímači ve vrstvě 3, budou do $g(\xi)$ zahrnuty také rychlosti vln ve vrstvě 3, c_3 ($1/a_6$) a C_3 ($1/a_5$), a sumace bude rozšířena až k $j=6$. Předpokládáme $a_6 < a_5 < a_4 < a_3 < a_2 < a_1$.

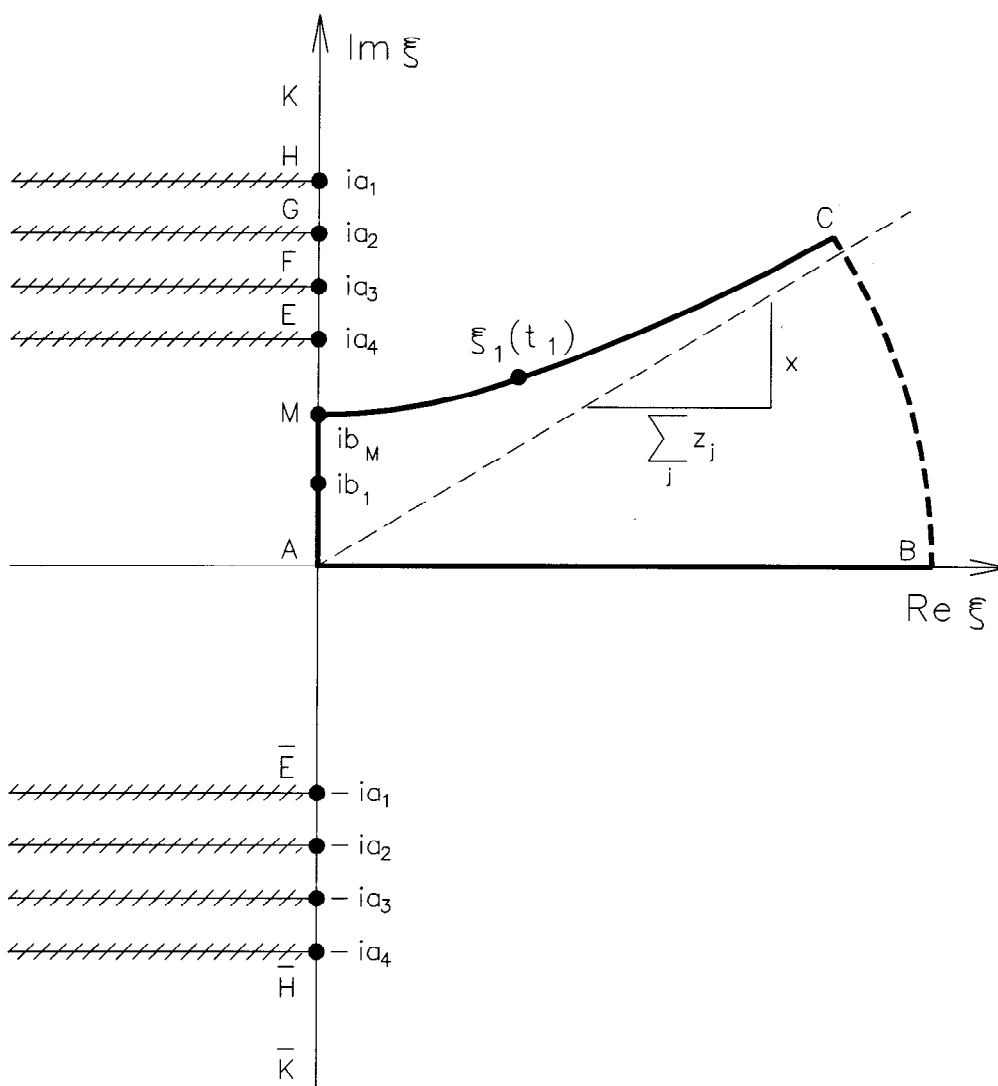
Člen $E(\xi)$ v rovnici (4.1) je obecně funkcí ξ^2 a $\sqrt{\xi^2 + a_j^2}$ pro $j=1,2,\dots,6$, protože $R_{PP}^{(3)}$ a $T_{PS}^{(3)}$ atd. závisí na a_5 a a_6 . $E(\xi)$ je reálné, je-li ξ reálné.

A. Cagniardova metoda

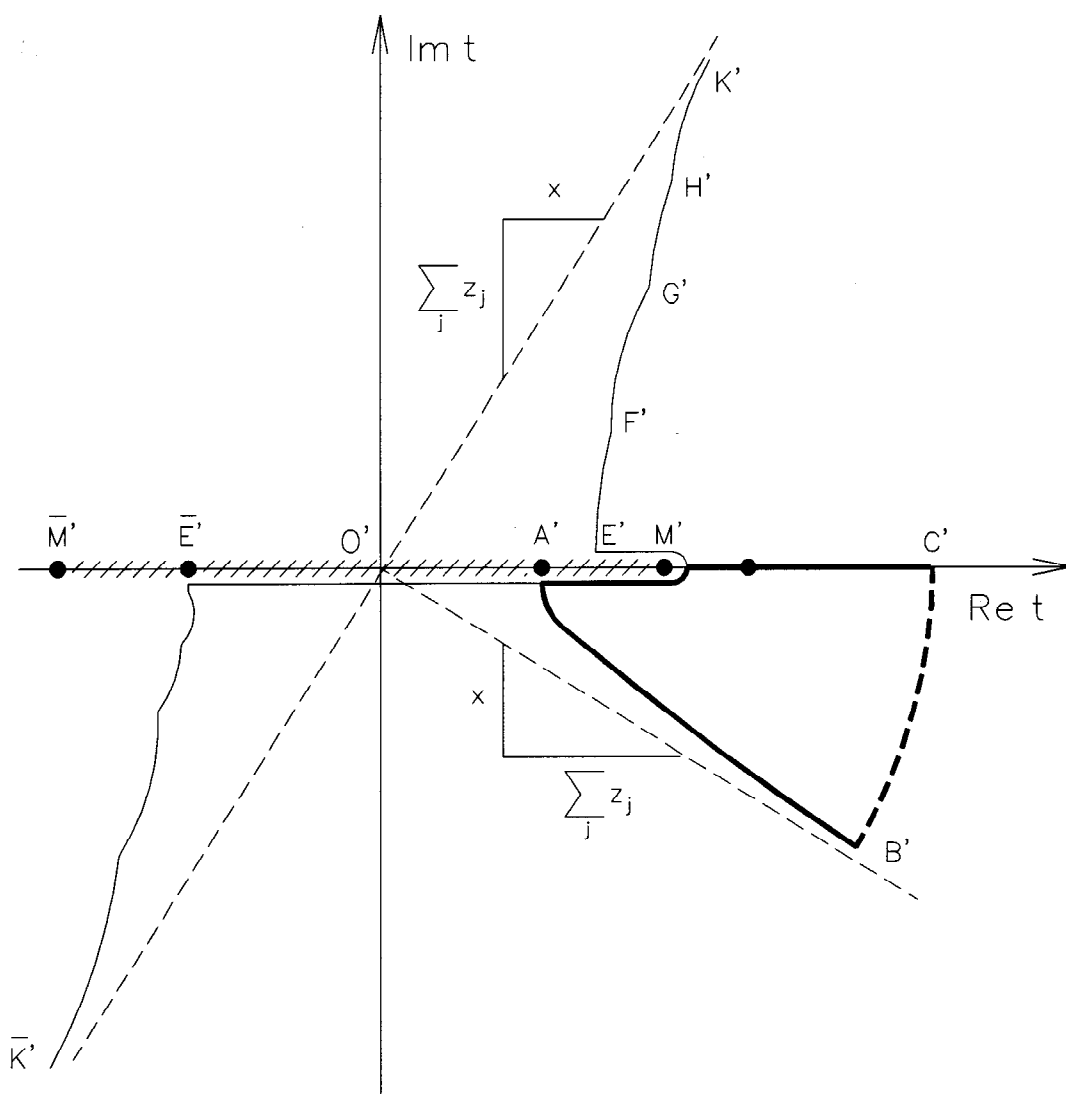
Transformace ξ na t vztahem

$$-t = g(x, z; \xi) = i\xi x - \sum_j z_j \sqrt{\xi^2 + a_j^2} \quad (4.3)$$

zobrazuje komplexní proměnnou ξ do komplexní roviny t (obr. 6 a 7). Funkce $E(\xi)$ a $g(\xi)$ jsou díky řezům vyznačeným na obrázku jednoznačné. V obr. 6 jsou body rozvětvení $\pm ia_5$, $\pm ia_6$ a odpovídající řezy vynechány. Jejich význam bude probírán v kapitole IV.B.2.



Obr. 6 Integrační cesta AB a komplexní rovina ξ



Obr.7 Integrační cesta $A'B'$ a komplexní rovina t

Funkce $E(\xi)$ má na imaginární ose ξ též jednoduché póly, které odpovídají vlnovým "pomalostem" Stoneleyových vln na rozhraní (2) a (3) a Rayleighově vlně na volném povrchu (1) (viz obr.2). Poněvadž jsou rychlosti Stoneleyových vln menší než rychlosti P- a S-vln v přilehlém prostředí a rychlost Rayleighovy vlny je menší než obě fázové rychlosti v horní vrstvě, budou všechny tyto póly umístěny nad (pod) bodem rozvětvení $+ia_4$ ($-ia_4$) v horní (dolní) polorovině ξ . Tyto póly nejsou do obrázků zakresleny.

Rovnice (4.3) zobrazuje reálnou ξ -osu, která je původní cestou integrace (přímka AB v obr.6), do křivky v komplexní rovině t (křivka A'B' v obr.7). Křivka má počátek v A', což odpovídá $t=t_A$, kde

$$t_A = -g(x, z; 0) = \sum_j z_j a_j .$$

Křivka má asymptotu O'B' znázorněnou čárkovanou čarou na obr.7.

Zobrazení imaginární ξ -osy je komplikovanější a vyžaduje studování zpětné transformace rovnice (4.3), která je $\xi=g^{-1}(t)$. Jestliže v rovnici existuje pouze jedna nebo dvě odmocniny, může být ξ vyjádřeno explicitně pomocí t . V případě více než dvou odmocnin, může být zpětná transformace vypočtena numericky. Inverzní funkce $g^{-1}(t)$ může mít singularitu, je-li $dt/d\xi=0$. V těchto singularitách má transformace v rovnici (4.3) stálé hodnoty.

Nechť podél imaginární osy $\xi=iw$, w je reálné. Rovnici (4.3) můžeme potom přepsat do tvaru

$$t = xw + \sum_j z_j \sqrt{a_j^2 - w^2} .$$

Tedy t je komplexní, je-li $|w| > a_4$ (body nad E nebo pod \bar{E} v obr.6), a reálné, je-li $|w| < a_4$ (body mezi E a \bar{E}). Jak $w \rightarrow \pm\infty$, blíží se t asymptotám $K'\bar{K}'$ (viz obr.7), protože $t \rightarrow \pm w(x + i \sum_j z_j)$.

Stálé body funkce $t=-g(\xi)$ jsou získány z rovnice

$$\frac{dt}{d\xi} = -ix + \sum_j z_j \xi / \sqrt{\xi^2 + a_j^2} = 0 . \quad (4.4)$$

Lze dokázat, že tato rovnice má pouze jeden kořen, $\xi=ib_M$, kde b_M je kladné reálné číslo menší než a_4 pro všechny kladné hodnoty x . Tento bod je v rovině ξ označen M (obr.6) a je zobrazen do bodu M' na reálné ose t . V tomto stálém bodě je inverzní funkce $g^{-1}(t)$ singulární (singularita polovičního řádu). Aby bylo $t(\xi)$ jednoznačné, je zaveden řez od M' podél reálné t osy do bodu \bar{M}' (obr.7). Druhý bod \bar{M}' je

zobrazen do $\xi = -ib_M$, což je kořen rovnice (4.4), jestliže vybereme jiné větve odmocnin.

Odtud plyne, že AME segment (podél kladné imaginární ξ -osy) je zobrazen do křivky A'M'E' v rovině t , kde A'M je pod řezem a M'E' je nad řezem (obr.7). V bodě M' je hodnota t rovna $t_M = -g(x, z; ib_M)$, což je maximální hodnota $t(\xi)$ mezi bodem A a E. Zbytek osy se zobrazuje do komplexní cesty E'K' s nespojitostmi ve sklonu v E' atd. Body E', F', G' a H' se zobrazují do odpovídajících bodů rozvětvení. Cesta má asymptotu O'K' a všechny póly na imaginární ξ -ose jsou též zobrazeny do této cesty (póly nejsou na obrázcích znázorněny). Záporná imaginární ξ -osa je zobrazena do křivky A'E'K' v rovině t .

Poněvadž v oblasti uzavřené křivkou A'B' (B' v nekonečnu) a reálnou osou t neexistují singulární body a lze dokázat, že příspěvek podél B'C' zmizí, může být integrace podél křivky A'B' nahrazena cestou podél A'M'C' (A'M' leží pod řezem). Jak je patrné z rovnice (4.3), úsek M'C' reálné t -osy se zobrazuje do MC v komplexní rovině ξ . Opět neexistují singulární body uvnitř AMCB (CB v nekonečnu). Tedy integrace podél původní cesty AB v rovině ξ může být nahrazena jednou ze tří následujících cest:

- i) A'B' v rovině t ,
- ii) A'M'C' (A'M' pod řezem) v rovině t ,
- iii) AMC v rovině ξ .

Jestliže je použita cesta A'M'C' v rovině t , je integrace v rovnici (4.1) transformována do reálné proměnné

$$\bar{u}(s) = \int_{t_A}^{\infty} \xi(t) E[\xi(t)] \frac{d\xi}{dt} e^{-st} dt \quad (4.5)$$

Zpětná Laplaceova transformace je potom

$$u(t) = \xi(t) E[\xi(t)] \frac{d\xi}{dt} H(t-t_A), \quad (4.6)$$

kde $H(t)$ je Heavisideova skoková funkce a $\xi(t)$ je nalezeno z inverzní funkce $\xi = g^{-1}(t)$.

Poněvadž $u(t)$ v rovnici (4.6) je zpětná Laplaceova transformace $\bar{u}(s)$ v rovnici (4.1), zpětné transformace \bar{u}_x a \bar{u}_z v rovnicích (3.16) a (3.17) jsou potom nalezeny pomocí konvolučního teorému. Z tabulky I vyplývá, že $s^2\bar{F}(s)=As^n f(s)$, kde A je konstanta a $n=0$ nebo 1. Tedy

$$u_x(x, z, t) = 2A \int_0^t f^{(n)}(t-\tau) \Im[\xi E_x(\xi) \frac{d\xi}{dt} H(\tau-\tau_A)] d\tau, \quad (4.7)$$

$$u_z(x, z, t) = 2A \int_0^t f^{(n)}(t-\tau) \Re[E_z(\xi) \frac{d\xi}{dt} H(\tau-\tau_A)] d\tau,$$

kde předpokládáme $f(0^+)=0$ a $f^{(n)}(x)=d^n f(x)/dx^n$. Rovnice (4.7) je přesným řešením pro vlny podél zobecněného paprsku.

Poznamenejme, že v rovnici (4.7) je ξ implicitní funkcí τ definovanou rovnicí (4.3). Dále pro $t=t_M$ je $d\xi/dt$ singulární [(4.4)]. Pro numerický výpočet těchto integrálů je daleko vhodnější provést integraci vzhledem k proměnné ξ . Předně integrace rovnice (4.6) vede na

$$\begin{aligned} \int_0^t u(\tau) d\tau &= \int_0^t \xi(\tau) E[\xi(\tau)] \frac{d\xi}{d\tau} H(\tau-t_A) d\tau \\ &= H(t-t_A) \int_{t_A}^t \xi(\tau) E[\xi(\tau)] \frac{d\xi}{d\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Poslední integrace může být změněna na integraci vzhledem k původní proměnné ξ , je-li znovu aplikována transformace daná rovnicí (4.3). Má-li čas t hodnotu t_1 , potom $\xi=\xi_1$. Potom, jelikož pro $\xi=0$ je $t=t_A$, můžeme psát

$$\int_0^{t_1} u(\tau) d\tau = H(t_1-t_A) \int_0^{\xi_1} \xi E(\xi) d\xi. \quad (4.8)$$

Integrační cesta pro ξ vede podél AMC v obr.6.

Horní mez $\xi_1(x, z; t_1)$ je buď ryze imaginární ($\xi_1=ib_1$), anebo komplexní; závisí to na tom, zda je $t_1 < t_M$ nebo $t_1 > t_M$. Z rovnice (4.3) je zřejmé, že, je-li $t_A < t_1 < t_M$, může ξ nabývat dvou možných hodnot: menší hodnotu mezi A a M nebo

větší hodnotu mezi E a M. Avšak zde musí být vybrána menší hodnota, neboť zobrazení AM odpovídá integrační cestě A'M' pod řezem roviny t (obr.7). Takovýto bod je v obr.6 označen ib_1 . Pro $t_1 > t_M$ je odpovídající bod na obr.6 označen ξ_1 .

Dále provedeme integraci per partes rovnice (4.7) s použitím rovnice (4.8); předpokládáme, že zdrojová funkce je hladká funkce,

$$u_x(x, z, t) = 2A H(t-t_A) \int_{t_A}^t f^{(n+1)}(t-\tau) \left[\Im \int_0^{\xi_1(\tau)} \xi E_x(\xi) d\xi \right] d\tau, \quad (4.9)$$

$$u_z(x, z, t) = 2A H(t-t_A) \int_{t_A}^t f^{(n+1)}(t-\tau) \left[\Re \int_0^{\xi_1(\tau)} E_x(\xi) d\xi \right] d\tau.$$

V těchto rovnicích je A konstanta a $f(t)$ je časová funkce zdroje (viz tab.I); $n=1$ pro všesměrové zdroje a $n=0$ pro vertikální sílu; platí vztah $s^2 \bar{F}(s) = A s^n \bar{f}(s)$. Funkce $f(t)$ a její první derivace jsou spojité pro $t \geq 0$ a $f(0) = f'(0) = 0$.

Rovnice (4.7) a (4.9) završují analýzu odezvy pro přímkové zatížení pro libovolný paprsek ve vícevrstevném pevném prostředí. Celková odezva je součtem odezev odpovídajících všem zobecněným paprskům. Poněvadž existuje cesta nejmenšího času a počáteční čas pro každý paprsek, před kterým nedochází k žádnému příspěvku, je zřejmé, že pro popis celkové odezvy během konečného časového intervalu, je třeba pouze konečný počet paprsků. Okamžiky příchodů jednotlivých paprsků jsou probírány v kapitole IV.B a VII.A. Celková odezva vln putujících podél všech možných zobecněných paprskových drah je diskutována v kapitole VII.

B. Přímé paprsky a lomené paprsky

Paprskové integrály v rovnici (4.9) jsou buď ve tvaru imaginární části komplexního integrálu (u_x),

$$u_x = \Im \int_{AMC} \xi E(\xi) d\xi, \quad (4.10)$$

nebo reálné části komplexního integrálu (u_z)

$$u_R = \Re \int_{AMC} E(\xi) d\xi \quad (4.11)$$

Integrand $E(\xi)$ je funkcí ξ^2 a $(\xi^2 + a_j^2)^{1/2}$ ($j=1, 2, \dots, 6$); je reálný, je-li ξ reálný, je-li ξ a všechny $(\xi^2 + a_j^2)^{1/2}$ reálné. Integrační cesta AMC je definována transformací (4.3) a je znázorněna na obr.6. Integrační cesta končí v ξ_1 , které je vypočteno pro dané hodnoty x a z_j v okamžiku pozorování. Integrace podél AM na imaginární ose je dále zkomplikována možností dodatečných bodů rozvětvení $\xi = ia_{6,5}$ mezi body A a M. Jejich vliv budeme nyní vyšetřovat.

1. Přímé paprsky

Jděme podél cesty AM, kde $\xi = iw$, w je reálná proměnná. Rovnice (4.3) potom vypadá

$$t - wx - \sum_{j=1} z_j \sqrt{a_j^2 - w^2} = 0 \quad (4.12)$$

Levá strana této rovnice je fáze zobecněné rovinné vlny, x resp. $\sum z_j$ je horizontální resp. vertikální souřadnice a w je "pomalost" fáze podél horizontálního směru. Celá rovnice představuje postup rovinné vlnoplochy.

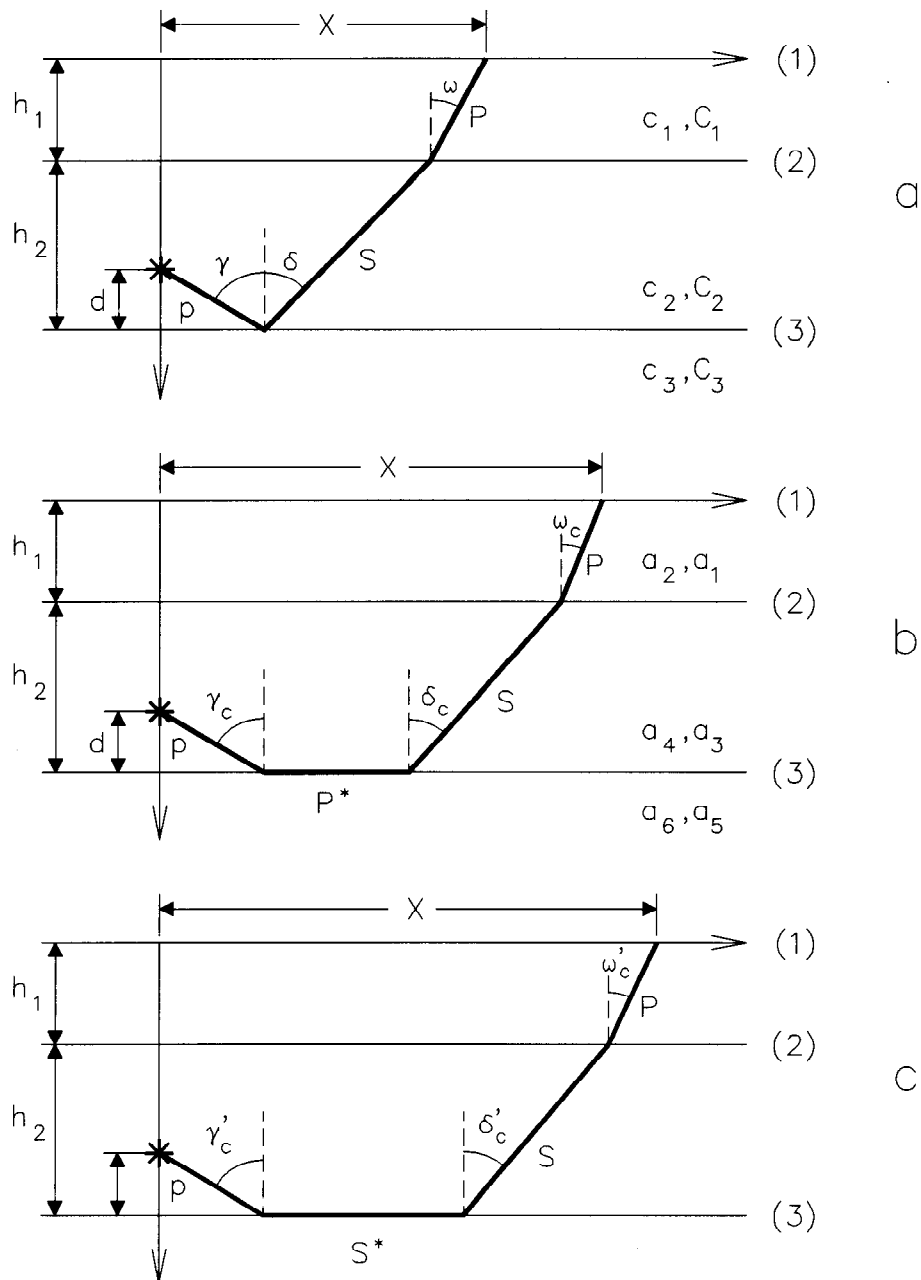
Doba potřebná na to, aby cylindrická vlna dorazila do přijímače, je určena z té hodnoty w , pro kterou je $t(w)$ maximální. Důvod spočívá v tom, že různé hodnoty odpovídají různým tečným rovinám ke skutečně zakřivené vlnoploše a rovina v průsečíku vlnoplochy a radiální přímky spojující zdroj a přijímač musí do přijímače dorazit jako poslední. Tedy hodnota w , pro kterou paprsek dosáhne přímo přijímač (včetně vícenásobných odrazů a prostupů), je jediným kořenem

$$\frac{dt}{dw} = x - \sum_j \frac{z_j w}{\sqrt{a_j^2 - w^2}} = 0 \quad (4.13)$$

Kořen byl již dříve definován jako $\xi = iw = ib_m$, kde $0 < b_m < a_4$ (bod M v obr.6). Odpovídající hodnota pro t je t_m ,

$$t_m = x b_m + \sum_j z_j \sqrt{a_j^2 - b_m^2} \quad (4.14)$$

Proto v čase $t=t_m$ přichází vlnoplocha řádně odraženého a prošlého paprsku do přijímače. Paprsky s řádným odrazem a vstupem jsou nazývány přímými paprsky (obr.8a).



Obr. 8 a) přímý paprsek;
 b) lomený P-paprsek podél rychlého dna;
 c) lomený S-paprsek podél rychlého dna.

2. Lomené paprsky

V kapitole III jsme se zmínili, že rovinné vlny mohou být totálně odrazeny od rozhraní, je-li úhel dopadu větší než kritický úhel γ_c , a cylindrická vlna, reprezentovaná paprskovým integrálem, která se šíří podél této "lomené paprskové dráhy", přichází dříve do přijímače (obr.4). Tato lomená vlna se nazývá "čelná vlna" (angl. head wave) nebo "kónická vlna" (Cagniard, 1939, kap.7). V našem případě se může lomená vlna objevit při dopadu dolů se šířící P- nebo S-vlny na rozhraní (2) nebo (3), neboť jsme zavedli předpoklad, že v nižších vrstvách jsou fázové rychlosti vyšší (obr.2).

Aby mohla lomená vlna existovat, musí být pomalost fáze w , která je dána rovnicí (4.12), rovna jedné z pomalostí rychlého dna. Uvažujme případ třísegmentového zobecněného paprsku emitovaného P-zdrojem ve vrstvě 2. Obr.8a zobrazuje přímý pSP-paprsek, kde malé písmeno označuje šíření směrem dolů. Z rovnice (4.12) odvodíme fázi tohoto paprsku

$$\begin{aligned} t &= xw + \sum_j z_j \sqrt{a_j^2 - w^2} \\ &= xw + d\sqrt{a_4^2 - w^2} + h_2\sqrt{a_3^2 - w^2} + h_1\sqrt{a_2^2 - w^2} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Je-li $w=a_5$ nebo a_6 , je část tohoto paprsku lomena na rozhraní (3) a vlny podél lomeného paprsku přicházejí v čase t_5 nebo t_6 , kde (obr.8b,c)

$$t_f = xa_f + \sum_j z_j \sqrt{a_j^2 - a_f^2} \quad (f=5,6) \quad (4.16)$$

Poněvadž $a_6 < a_5 < a_4$ ($c_3 > c_3 > c_2$), je nutnou a postačující podmínkou pro příchod lomeného paprsku před přímým paprskem ($t_{5,6} < t_M$ nebo-li $a_{5,6} < b_M$)

$$\left(\frac{dt}{dw} \right)_{w=a_{5,6}} > 0 \quad , \quad (4.17)$$

protože t_M je maximální hodnota $t(w)$ pro $0 < w < a_4$. Pomocí rovnice (4.13) lze podmínku přepsat na tvar

$$x > x_f = a_f \sum_j \frac{z_j}{\sqrt{a_j^2 - a_f^2}} \quad (4.18)$$

Poněvadž $a_6 < a_5$, potom $x_6 < x_5$. Vzdálenosti x_5 a x_6 jsou dva kritické rozsahy; bude-li x menší než tyto rozsahy, budou úhly dopadu pro prošlý paprsek menší než kritický úhel, takže lomené vlny nevzniknou. Vyhodnocení komplexních integrálů v rovnicích (4.10) a (4.11) zřejmě závisí na umístění přijímače (x, z) , čase pozorování (vzhledem ke kritickým rozsahům x_5 , x_6 a kritickým časům t_M, t_5 a t_6). Pro obě rovnice může být integrace rozdělena do dvou částí, první od A do M podél imaginární osy $\xi (=i\omega)$ a druhá od M do $\xi_1(t)$ podél MC v komplexní rovině (obr.6 a 9).

Nejprve podle rovnice (4.18) vyhodnotíme x_f ($f=5,6$) při známých vertikálních projekcích z_j zobecněného paprsku a potom porovnáme horizontální vzdálenost x s $x_{5,6}$.

Případ A: $x < x_6$

Lom neexistuje a vlny šířící se po přímém paprsku pSP jsou zobrazeny v obr.8a. Úhly dopadu, odrazu a lomu splňují Snellův zákon

$$\frac{\sin \gamma}{c_2} = \frac{\sin \delta}{c_2} \quad , \quad \frac{\sin \delta}{c_2} = \frac{\sin \omega}{c_1} \quad (4.19)$$

w v rovnici (4.15) je pomalost rovinných vln promítnutých do x -ové osy; platí vztah $w=1/c$, a

$$\sin \gamma = c_2/c \quad , \quad \sin \delta = c_2/c \quad , \quad \sin \omega = c_1/c. \quad (4.20)$$

Poznamenejme, že Snellův zákon může být přímo ověřen pomocí těchto rovnic. Hodnota w nebo c závisí na dopadajícím úhlu γ a naopak. Je-li $w=b_M$ [rovnice (4.13)], doba postupu podél této dráhy je minimální a čas příchodu tohoto paprsku je t_M .

Poněvadž v tomto případě, $x < x_6 (< x_5)$, leží body rozvětvené $ia_{5,6}$ nad pevným bodem M (viz obr.9a). Hodnoty u_I a u_R [(4.10) a (4.11)] podél AM mizí. Tedy

$$\Im \int_{AM} \xi E(\xi) d\xi = \Im \int_0^{b_M} (-w) E(iw) dw = 0, \quad (4.21)$$

$$\Re \int_{AM} E(\xi) d\xi = \Re \int_0^{b_M} E(iw) i dw = 0.$$

Důvodem je, že $E(iw)$ je reálná funkce pro $0 < w < b_M$. Tedy pouze druhá část integrace podél $M\xi_1$ přispívá k celkové odezvě, je-li $t > t_M$.

Případ B: $x_5 > x > x_6$

Je-li pozorovací vzdálenost větší než kritický rozsah x_6 , je část paprsku lomna podél rozhraní (3) jako P-vlna (obr.8b). Tento případ budeme označovat jako pP*SP-paprsek. V tomto případě $w = a_6 = 1/c_3$ a úhly γ , δ a ω jsou definovány [(4.20)]

$$\sin \gamma_c = c_2/c_3, \quad \sin \delta_c = c_2/c_3 \quad \text{a} \quad \sin \omega_c = c_1/c_3. \quad (4.22)$$

Toto jsou kritické úhly lomu (totální odraz). Z rovnic (4.22) je zřejmé, že kritické úhly existují pouze, je-li $c_3 > c_2 > c_1$.

Doba příchodu podél této dráhy je [(4.16)]

$$t_6 = xa_6 + d\sqrt{a_4^2 - a_6^2} + h_2\sqrt{a_3^2 - a_6^2} + h_1\sqrt{a_2^2 - a_6^2}. \quad (4.23)$$

Tento vzorec si můžeme ověřit z geometrie v obr.8b; poznamenejme, že celkový čas potřebný k průchodu cestou je

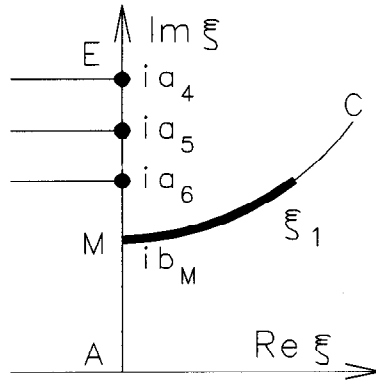
$$t = \frac{a_4 x_P}{\sin \gamma_c} + a_6 x^* + \frac{a_3 x_S}{\sin \delta_c} + \frac{a_2 x_P}{\sin \omega_c},$$

kde $x_P + x^* + x_S + x_P = x$ a každý člen je x -ovou projekcí příslušného segmentu.

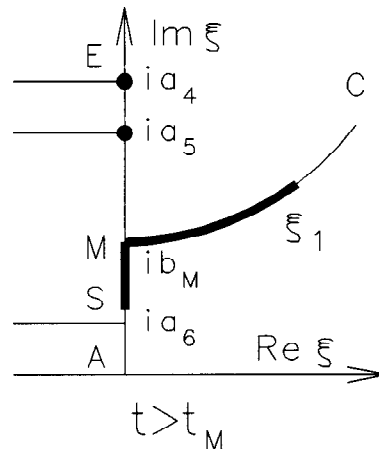
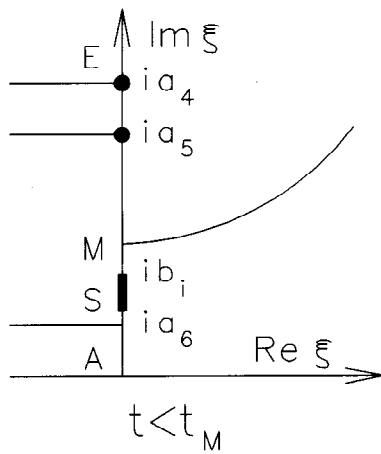
Jak je vidět z obr.9b, v tomto případě leží bod rozvětvení ia_6 pod bodem M, ale ia_5 stále ještě leží nad ním. Integrace podél imaginární osy od A do ia_6 zmizí, protože $E(iw)$ je reálné pro $0 < w < a_6$. Tedy odezva v přijímači začíná v čase $t = t_6$. Potom následuje příchod přímého paprsku v čase $t = t_M$. Koncový bod integrační cesty ξ_1 závisí na dvou možných

hodnotách t :

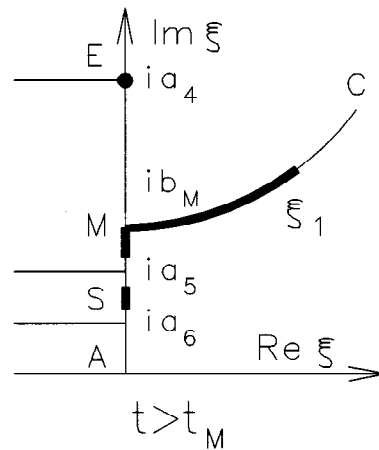
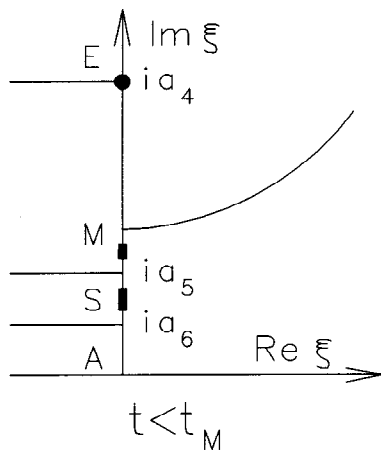
- Jestliže $t < t_M$, potom $\xi_1 = ib_1$ ($b < b_M$); ryze imaginární číslo. Druhou část integrace proto nemusíme uvažovat.
- Jestliže $t > t_M$, ξ_1 je komplexní číslo na cestě MC a obě části integrace přispívají k celkové odezvě.



a



b



c

Obr.9 Integrační cesty pro přímé a lomené paprsky

Případ C: $x > x_5$

Poněvadž $x_5 > x_6$, existuje navíc k pP*SP-paprsku lomený S-paprsek (pS*SP) (viz obr.8c). Kritické úhly jsou dány

$$\sin \gamma'_c = c_2/c_3, \quad \sin \delta'_c = c_2/c_3, \quad \sin \omega'_c = c_1/c_3. \quad (4.22)$$

Doba příchodu je t_5 [(4.23), kde zaměníme a_5 za a_6].

Jak je vidět na obr.9c, leží v tomto případě oba body rozvětvení ia_6 , ia_5 pod pevným bodem M. Hodnota integrálu mezi A a ia_6 bude stále nulová. Odezva začne s příchodem pP*SP v $t=t_6$ a nastává náhlá změna při příchodu pS*SP-paprsku v $t=t_5$. Tyto dva lomené paprsky jsou následovány přímým paprskem v $t=t_M$. Koncové body integrace jsou stejné jako v případě B.

3. Podpovrchové a povrchové síly a kónické vlny

Druhou paprskovou dráhou, která je analogická k lomenému paprsku podél rychlého dna, je kónická vlna generovaná silou působící na volném povrchu (obr.10). Řešení tohoto problému je obsaženo v rovnicích (4.26) a (4.27). Fázové funkce pro P-paprsek resp. S-paprsek jsou

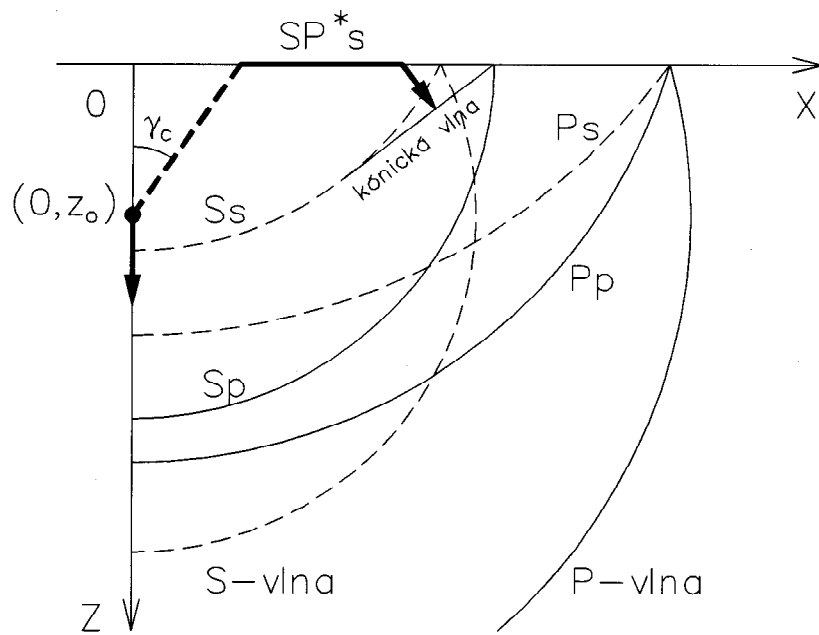
$$\begin{aligned} -t &= i\xi x - z\sqrt{\xi^2 - a_2^2}, \quad a_2 = 1/c_1, \\ -t &= i\xi x - z\sqrt{\xi^2 - a_1^2}, \quad a_1 = 1/c_1. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Doby příchodů jsou dány $\xi = iw = ib_M$ [rovnice (4.13)], kde $b_M = a_2 x / (x^2 + z^2)^{1/2}$ pro P-paprsek a $b_M = a_1 x / (x^2 + z^2)^{1/2}$ pro S-paprsek.

Existuje však možnost, že x-ová projekce fázové rychlosti S-paprsku se rovná rychlosti P-vlny v prostředí. Položíme-li $\xi = iw$ a $w = a_2$ v druhé rovnici (4.25), získáme

$$t_2 = xa_2 + z\sqrt{a_1^2 - a_2^2}. \quad (4.26)$$

Toto je doba příchodu S-paprsku, který je lomen podél povrchu a na obr.10 je označen P*s. Takovýto paprsek existuje pouze, je-li pozorovací bod (x,z) mimo oblast



Obr.11 Dopadající, odražená a kónická vlna při podpovrchové síle v poloprostoru ($\sin \gamma_c = c_1/c_1$).

V. Osově symetrické vlny vyvolané bodovým zatížením

Při vlnovém pohybu, který je symetrický okolo osy z (obr.2), jsou všechny proměnné popisující pole napjatosti nezávislé na φ . Jak bylo řešeno v kapitole II.B.2, mohou být výchylky $[u_r, 0, u_z]$ vypočteny pomocí dvou potenciálů $\phi(r, z, t)$ a $\psi(r, z, t)$. Obecná řešení $\bar{\phi}(r, z, s)$ a $\bar{\psi}(r, z, s)$ jsou dána rovnicí (2.31).

Pro třívrstvé prostředí je deset neznámých koeficientů $A_1, \dots, D_1; A_2, \dots, D_2; A_3$ a C_3 určeno z deseti okrajových podmínek v rovnici (3.1), když τ_{zx} resp. u_x je nahrazeno τ_{zr} resp. u_r . Tyto podmínky mohou být nahrazeny požadavky spojitosti Laplaceových obrazů potenciálů na rozhraních

$$\begin{aligned} \bar{\phi} + \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} \quad , \quad \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial z^2} - \frac{s^2}{c^2} \bar{\psi} \quad , \\ 2\mu \left[\left(\frac{s^2}{2c^2} - \frac{s^2}{c^2} \right) \bar{\phi} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial z^2} - \frac{s^2}{c^2} \bar{\psi} \right) \right] \quad , \quad (5.1) \\ 2\mu \left[\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial z^2} - \frac{s^2}{2c^2} \bar{\psi} \right] \quad . \end{aligned}$$

Tyto podmínky jsou zvláště výhodné, neboť obsahují pouze derivace vzhledem k z .

Jak je uvedeno v kapitole II.B, Laplace-Hankelovy obrazy potenciálů osově symetrických řešení $\hat{\phi}$ a $\hat{\psi}$ [(2.30)] mají stejnou závislost na z jako Laplace-Fourierovy obrazy potenciálů řešení rovinného přetvoření ϕ a ψ [(2.21)]. Tedy zobecněné paprsky pro osově symetrické vlny mohou být určeny obdobně.

Z obr.3 vyplývá, že bodový zdroj v $z=z_0$ emituje P-vlnu se sférickou vlnoplochou. P-vlna je na rozhraní $z=0$ odražena a lomena. Vlny ve dvou přilehlých prostředích jsou

$$\bar{\phi}_1(r, z, s) = s^2 \int_0^\infty \hat{\phi}_1(\xi, z, s) J_0(s\xi r) \xi \, d\xi \quad (5.2)$$

$$\bar{\psi}_1(r, z, s) = s^2 \int_0^\infty \frac{-1}{s\xi} \hat{\psi}_1(\xi, z, s) J_0(s\xi r) \xi \, d\xi \quad (i=1,2)$$

kde

$$\hat{\phi}_2 = \bar{F}(s) S_p(\eta_2) \left[e^{-s\eta_2 |z-z_0|} + R^{PP} e^{s(-\eta_2 z - \eta_2 z_0)} \right], \quad (5.3)$$

$$\hat{\psi}_2 = \bar{F}(s) S_p(\eta_2) R^{PS} e^{s(-\zeta_2 z - \eta_2 z_0)},$$

a

$$\hat{\phi}_1 = \bar{F}(s) S_p(\eta_2) T^{PP} e^{s(\eta_1 z - \eta_2 z_0)}, \quad (5.4)$$

$$\hat{\psi}_1 = \bar{F}(s) S_p(\eta_2) T^{PS} e^{s(\zeta_1 z - \eta_2 z_0)}.$$

První člen v $\hat{\phi}_2$ je zdrojový paprsek [(2.35) a tab.I]. Zbývající členy v rovnicích (5.3) a (5.4) odpovídají Fourierovým transformacím rovnic (3.3) a (3.4). Součinitel $-s\xi$ je vložen do rovnice (5.2), takže koeficienty odrazu a přestupu R^{PP}, \dots, T^{PS} jsou stejné jako koeficienty v případě rovinného přetvoření [(3.9) - (3.11)] za předpokladu vynechání $i(\sqrt{-1})$ v těchto rovnicích.

Nyní je již zřejmé, jak odvodit zobecněné paprsky [(3.14)] pro osově symetrické vlny ve vrstevnatém prostředí. Příklady jsou uvedeny v kapitole V.A. Protože však integrand obsahuje Besselovy funkce, nemůže být zpětná Laplaceova transformace $\bar{\phi}$ a $\bar{\psi}$ prováděna přesně jako v kapitole IV, nýbrž je třeba provést jisté úpravy. Tyto úpravy jsou probírány v kapitole V.B.

A. Osově symetrické vlny v jednoduché vrstvě

Problémy tranzientních vln v desce nebo ve vrstvě ležící na poloprostoru jsou z hlediska aplikací nejzajímavější. Poněvadž jsou vlny omezeny na jednoduchou vrstvu a vlny, které pronikly do poloprostoru, nejsou odrazeny do vrstvy,

lze zobecněné paprsky v této vrstvě odhalit systematicky pomocí maticového vyjádření.

1. Maticové vyjádření skupiny zobecněných paprsků

Uvažujme opět bodový zdroj ve vrstvě (obr.12) v hloubce $z=z_0$. Laplace-Hankelovy obrazy vln emitovaných zdrojem mohou být vyjádřeny jako

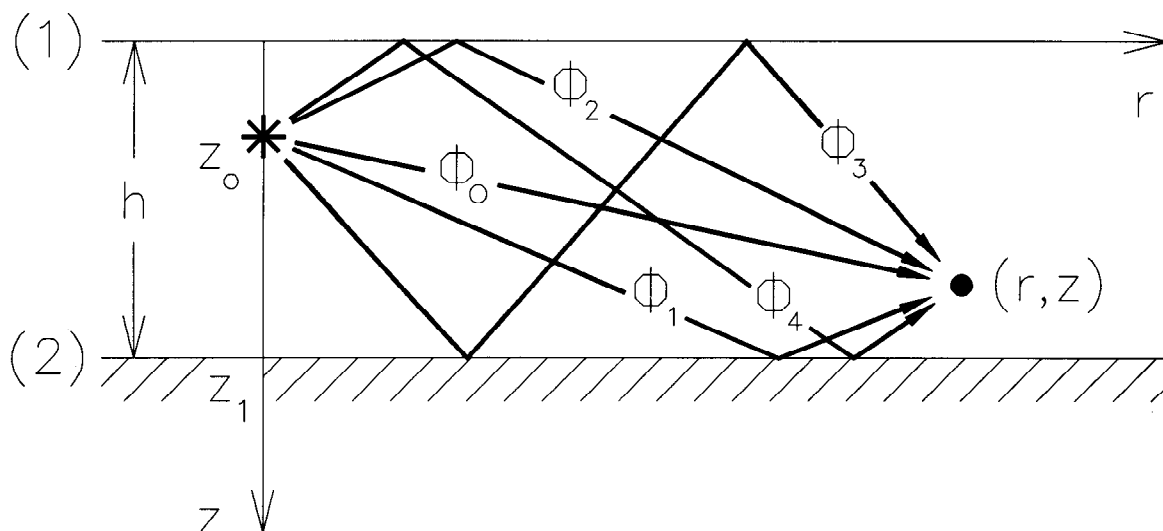
$$\phi_0(\xi, z, s) = H(|z-z_0|) S(\xi) \bar{F}(s), \quad (5.5)$$

kde

$$\phi_0(\xi, z, s) = \begin{bmatrix} \hat{\phi}_0(\xi, z, s) \\ \hat{\psi}_0(\xi, z, s) \end{bmatrix}, \quad S(\xi) = \begin{bmatrix} S_p(\xi) \\ S_v(\xi) \end{bmatrix},$$

$$H(z) = \begin{bmatrix} e^{-s\eta z} & 0 \\ 0 & e^{-s\eta z} \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

ϕ a S jsou dvě sloupcové matice. První označuje skupiny paprsků a druhá reprezentuje zdrojovou funkci. Index 0 u ϕ_0 označuje, že se jedná o nulovou paprskovou skupinu, nebo-li zdrojovou paprskovou skupinu. Diagonální čtvercová matice $H(z)$ je částí fázových funkcí vln.



Obr.12 Skupiny paprsků v jednoduché vrstvě

Ve složkovém tvaru rovnice (5.5) vede ke stejnému výsledku jako Hankelovy transformace rovnice (2.35). Pro bodový všesměrový zdroj resp. koncentrovanou sílu je S (tab.I)

$$s(\xi) = \begin{bmatrix} 1/\eta \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{resp.} \quad s(\xi) = \begin{bmatrix} -\varepsilon \\ \xi/\zeta \end{bmatrix} .$$

Dále necht

$$\phi_0(\xi, z, s) = \begin{bmatrix} \phi_0(\xi, z, s) \\ \psi_0(\xi, z, s) \end{bmatrix} , \quad (5.7)$$

potom rovnice (5.5) vede ke stejnému výsledku jako Fourierovy transformace rovnice (2.27). Tedy výsledky této podkapitoly [rovnice (5.5) až (5.15)] jsou též aplikovatelné na problémy rovinného přetvoření s přímkovými zdroji (Norwood, 1975; Schmuely, 1975).

Zdrojový paprsek je nyní pokládán za dopadající vlnu, která je odrazena od dolního povrchu ($z=h$) s koeficienty odrazu $R^{(2)}$ nebo od horního povrchu ($z=0$) s koeficienty odrazu $R^{(1)}$. Tyto jednou odražené vlny nazýváme první paprsková skupina (ϕ_1) resp. druhá paprsková skupina (ϕ_2):

$$\begin{aligned} \phi_1(\xi, z, s) &= H(h-z)R^{(2)}\phi_0(\xi, h, s) \\ &= H(h-z)R^{(2)}H(h-z_0)S(\xi)\bar{F}(s) , \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} \phi_2(\xi, z, s) &= H(z)R^{(1)}\phi_0(\xi, 0, s) \\ &= H(z)R^{(1)}H(z_0)S(\xi)\bar{F}(s) . \end{aligned} \quad (5.9)$$

Matice pro koeficienty odrazu na rozhraní (1) resp (2) jsou

$$R^{(1)} = \begin{bmatrix} R_{(1)}^{PP} & R_{(1)}^{SP} \\ R_{(1)}^{PS} & R_{(1)}^{SS} \end{bmatrix} \quad \text{resp.} \quad R^{(2)} = \begin{bmatrix} R_{PP}^{(2)} & R_{SP}^{(2)} \\ R_{PS}^{(2)} & R_{SS}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Složky $R^{PP}, \dots, R^{SS}, R_{PP}, \dots, R_{SS}$ jsou uvedeny v kapitole III.B s příslušnými úpravami pro osově symetrické vlny

Při druhém odrazu je ϕ_1 odraženo v $z=0$ jako ϕ_3 a ϕ_2 je odraženo v $z=h$ jako ϕ_4 . Výsledky jsou

$$\begin{aligned}\phi_3(\xi, z, s) &= H(z)R^{(1)}\phi_1(\xi, 0, s) \\ &= H(z)R^{(1)}H(h)R^{(2)}H(h)H(-z_0)S(\xi)\bar{F}(s),\end{aligned}\quad (5.11)$$

kde bylo použito vztahu $H(h-z_0)=H(h)H(-z_0)$, a

$$\begin{aligned}\phi_4(\xi, z, s) &= H(h-z)R^{(2)}\phi_2(\xi, h, s) \\ &= H(h-z)R^{(2)}H(h)R^{(1)}H(z_0)S(\xi)\bar{F}(s).\end{aligned}\quad (5.12)$$

Poznamenejme, že ϕ_0, \dots, ϕ_4 se nazývají paprskové skupiny, neboť každá skupina je složena z několika paprsků. Zdrojová paprsková skupina ϕ_0 je složena ze dvou paprsků (P a S); ϕ_1 a ϕ_2 jsou složeny ze čtyř paprsků (PP, SP, SS a PS). Pro ϕ_1 směřuje první úsek paprsku dolů ze zdroje, kdežto pro ϕ_2 směřuje nahoru ze zdroje. Podobně ϕ_3 a ϕ_4 jsou složeny z osmi paprsků (PPP, SPP, ..., SSS).

Všechny vyšší řády paprskových skupin obsahují součinitel

$$M = R^{(1)}H(h)R^{(2)}H(h), \quad (5.13)$$

který představuje část paprsku, která prochází dvakrát tloušťkou vrstvy a je odražena jednou od dolního povrchu (koeficient $R^{(2)}$) a jednou od horního povrchu (koeficient $R^{(1)}$). Celkový výsledek je

$$\begin{aligned}\phi(\xi, z, s) &= \sum_{m=0}^{\infty} \phi_m(\xi, z, s) \\ &= \phi_0 + \bar{F}(s) \left[H(h-z)R^{(2)}H(h) + H(z)M \right] \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} M^n H(-z_0)S(\xi) \\ &\quad + \bar{F}(s) \left[H(z) + H(h-z)R^{(2)}H(h) \right] \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} M^n R^{(1)}H(z_0)S(\xi).\end{aligned}\quad (5.14)$$

První člen je zdrojová paprsková skupina [(5.5)]. Druhý člen je součet všech lichých paprskových skupin (první úsek vycházející ze zdroje míří dolů) a třetí člen je součet všech sudých paprskových skupin (první úsek míří nahoru).

Výše uvedený vzorec zobecněných paprsků v maticovém tvaru je výhodný minimálně ze dvou důvodů:

- 1) Systematicky počítá všechny zobecněné paprsky, včetně všech paprsků vyvolaných změnou módu, a automaticky spojuje paprsky do skupin. Zpětné transformace ϕ budou provedeny pro každou skupinu. Toto spojení paprsků do skupin je potřebné, neboť tak se můžeme vyvarovat divergenci numerické integrace, která by v případě integrace každého paprsku zvlášť mohla nastat (Spencer, 1965a).
- 2) Matice M je čtvercová matice druhého stupně, která vyhovuje vlastní charakteristické rovnici podle Cayley-Hamiltonova teorému. Tedy

$$M^2 = -aM - bI \quad , \quad (5.15)$$

kde I je jednotková matice a a a b jsou koeficienty charakteristické rovnice matice M . Opakovaným použitím výše uvedeného vztahu lze M^m vyjádřit jako lineární kombinaci M a I (Norwood, 1975).

Zpětná Hankelova transformace bude provedena podle rovnice (5.2). Pokud $\phi_m(\xi, z, s) = [\hat{\phi}_m, \hat{\psi}_m]$, dostaneme

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_m(r, z, s) &= s^2 \int_0^\infty \hat{\phi}_m(\xi, z, s) J_0(s\xi r) \xi \, d\xi \\ \bar{\psi}_m(r, z, s) &= s^2 \int_0^\infty \frac{-1}{s\xi} \hat{\psi}_m(\xi, z, s) J_0(s\xi r) \xi \, d\xi . \end{aligned} \quad (5.16)$$

2. Potenciály, výchylky a napětí

Z maticových součinů zjistíme, že $\hat{\phi}_m$ nebo $\hat{\psi}_m$ rovnice (5.14) je složeno ze dvou částí, jednu vyvolá S_p -zdroj, druhou S_s -zdroj. Každá část má tvar

$$(\hat{\phi}_m, \hat{\psi}_m) = \bar{F}(s) S \Pi e^{-sh(\xi, z)} \quad , \quad (5.17)$$

kde je fázová funkce, podobně jako fázová funkce v rovnici (3.18), dána

$$h(\xi, z) = \zeta z_1 + \eta z_2 = \sum_{j=1} z_j \sqrt{\xi^2 + a_j^2} \quad . \quad (5.18)$$

z_2 je celková projekce všech P-úseků paprsku s "pomalostí" $a_2 (=1/c)$ do z-ové osy a z_1 je celková projekce všech S-úseků s "pomalostí" a_1 do z-ové osy. Poslední úsek $\hat{\phi}_m$ musí být v P-módu a poslední úsek $\hat{\psi}_m$ v S-módu. V rovnici (5.17) může být S buď P-zdroj nebo S-zdroj a Π představuje průběžné součiny koeficientů odrazu.

Substitucí rovnice (5.17) do rovnice (5.16) a potom do (2.13) a (2.14) získáme Laplaceovy obrazy výchylek a napětí. Konečný výraz pro každou veličinu je součtem dvou integrálů, jeden odvozen od $\bar{\phi}_m$, jeden od $\bar{\psi}_m$; každý integrál má tvar

$$(\bar{u}_i, \bar{\tau}_{ij}) = s^{2+q} \bar{F}(s) \int_0^\infty s(\xi) \Pi(\xi) D(\xi) J_n(s\xi r) \xi \, d\xi \quad . \quad (5.19)$$

Mocnina q , řád n a přijímací funkce $D(\xi)$ jsou dány v tab.III.

B. Inverze Laplaceových transformací

Klíčem k sestavení zpětných Laplaceových transformací \bar{u}_i nebo $\bar{\tau}_{ij}$ v rovnici (5.19) je nahrazení Besselovy funkce jejím integrálním vyjádřením (National Bureau of Standards, 1964, rovnice 9.1.21)

$$J_n(z) = \frac{i^{-n}}{\pi} \int_0^\pi e^{iz \cos(\omega)} \cos(n\omega) \, d\omega \quad (5.22)$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{\pi} i^{-n} \Re \int_0^{\pi/2} e^{iz \cos(\omega)} \cos(n\omega) \, d\omega \quad , \quad n=0, 2, 4, \dots \\ \frac{2}{\pi} i^{-n+1} \Im \int_0^{\pi/2} e^{iz \cos(\omega)} \cos(n\omega) \, d\omega \quad , \quad n=1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Tabulka 3 q , n a $D(\xi)$ pro výchylky a napětí [(5.19)]

	q	n	D(P-vlna)	D(SV-vlna)
u_z	1	0	$-\varepsilon\eta$	$-\xi$
u_r	1	1	$-\xi$	$-\varepsilon\zeta$
τ_{zz}	2	0	$\mu(\xi^2+\zeta^2)$	$2\mu\varepsilon\xi\xi$
τ_{zr}	2	1	$2\mu\varepsilon\xi\eta$	$\mu(\xi^2+\zeta^2)$
τ	2	0	$(3\lambda+2\mu)/3c^2$	0
Přijímač na volném povrchu $z=0$ ($\varepsilon=-1$) a na dně ($\varepsilon=1$)				
u_z	1	0	$-\varepsilon\eta+\varepsilon\eta R^{PP}-\xi R^{PS}$	$-\xi+\varepsilon\eta R^{SP}-\xi R^{SS}$
u_r	1	1	$-\xi-\xi R^{PP}+\varepsilon\zeta R^{PS}$	$-\varepsilon\zeta-\xi R^{SP}+\varepsilon\zeta R^{SS}$

$$\tau_{\theta\theta} = \frac{3\lambda}{3\lambda+2\mu}\tau + 2\mu\frac{u_r}{r}, \quad \tau_{rr} = 3\tau - (\tau_{\varphi\varphi} - \tau_{zz}). \quad (5.21)$$

V této kapitole si budeme všimnout případu \bar{u}_z a \bar{u}_r .

\bar{u}_z a \bar{u}_r v rovnici (5.19) může být vyjádřeno jako ($q=1$)

$$\begin{aligned} \bar{u}_z(\xi, z, s) &= s^3 \bar{F}(s) \bar{I}_z(r, z, s), \\ \bar{u}_r(\xi, z, s) &= s^3 \bar{F}(s) \bar{I}_r(r, z, s), \end{aligned} \quad (5.23)$$

kde

$$\bar{I}_z = \int_0^\infty E_z(\xi) e^{-sh(\xi, z)} J_0(s\xi r) \xi d\xi, \quad (5.24)$$

$$\bar{I}_r = \int_0^\infty \xi E_r(\xi) e^{-sh(\xi, z)} J_1(s\xi r) \xi d\xi. \quad (5.25)$$

Ve výše uvedených rovnicích bylo $S(\xi)\Pi(\xi)D(\xi)$ pro \bar{I}_z nahrazeno $E_z(\xi)$ a pro \bar{I}_r $\xi E_r(\xi)$.

Po substituci první rovnice (5.22) do (5.24) dostaneme

$$\bar{I}_z(r, z, s) = \frac{2}{\pi} \Re \int_0^{\pi/2} d\omega \int_0^\infty E_z(\xi) e^{s[i\xi r \cos(\omega) - h(\xi, z)]} \xi d\xi. \quad (5.26)$$

Poznamenejme, že byla provedena záměna pořadí integrace v ω a v ξ , poněvadž integrál v ξ je stejnoměrně konvergentní pro $0 < \omega < \pi/2$. Podobně

$$\bar{I}_r(r, z, s) = \frac{2}{\pi} \Im \int_0^{\pi/2} d\omega \int_0^\infty \xi E_r(\xi) e^{s[i\xi r \cos(\omega) - h(\xi, z)]} \xi d\xi. \quad (5.27)$$

Zpětná Laplaceova transformace výrazu \bar{I}_z nebo \bar{I}_r je detailněji rozebírána v původním pojednání Cagniarda (1939, kapitola 5). Poznamenejme, že integrál v ξ je podobný integrálu v rovnici (4.1). Celý exponent $i\xi r \cos(\omega) - h(\xi, z)$ je ekvivalentní $g(x, z; \xi)$ v rovnicích (4.1)-(4.3).

1. Transformace proměnné ξ na t

Podle původní Cagniardovy metody transformujeme ξ na t pomocí následující transformace

$$-t = i\xi r \cos(\omega) - \sum_j z_j \sqrt{\xi^2 + a_j^2}. \quad (5.28)$$

t má extrém v $t = t_M = t(\xi_M)$, kde ξ_M je kořen rovnice

$$\frac{dt}{d\xi} = \sum_j z_j \xi / \sqrt{\xi^2 + a_j^2}. \quad (5.29)$$

Tyto rovnice jsou stejné jako rovnice (4.3) resp. (4.4), pokud x nahradíme $r \cos(\omega)$. Původní integrační cesta podél reálné osy ξ na obr.6 je transformována na cestu v komplexní rovině t (A'B') a potom zformována do reálné osy t na obr.7. Konečný výsledek je

$$\bar{I}_z(r, z, s) = \frac{2}{\pi} \Re \int_0^{\pi/2} d\omega \int_{t_A}^\infty E_z[\xi(\omega, t)] \xi \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_\omega e^{-st} dt, \quad (5.30)$$

kde $t_A = \sum_j (z_j a_j)$.

Během celé transformace od ξ k t je ω parametr. Je-li $\omega=0$, je integrační cesta právě taková, jaká je zobrazena na

obr.6 a 7 s $x=r$. Je-li $\omega=\pi/2$, transformace je stejná jako transformace v rovnici (4.3) s $x=0$,

$$t \Big|_{\omega=\pi/2} = \sum_j z_j \sqrt{\xi^2 + a_j^2} .$$

Je-li $x=0$, splývá cesta MC s reálnou osou ξ a A'B' s reálnou osou t . Transformace tedy zobrazuje cestu AB přímo do cesty A'C' podél reálné osy t a $t_A=t_M$.

Zaměníme-li pořadí integrace v t a ω v rovnici (5.30), dostaneme

$$\bar{I}_z(r, z, s) = \int_t^\infty \left[\frac{2}{\pi} \Re \int_0^{\pi/2} E[\xi(\omega, t)] \xi \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_\omega d\omega \right] e^{-st} dt. \quad (5.31)$$

Tato změna je přípustná, i když $\partial \xi / \partial t$ je pro t_M ($t_A < t_M < \infty$) singulární; singularita polovičního řádu. Zpětná Laplaceova transformace \bar{I}_z je potom získána inspekcí

$$\bar{I}_z(r, z, t) = H(t-t_A) \frac{2}{\pi} \Re \int_0^{\pi/2} E_z[\xi(\omega, t; r, z)] \xi \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_\omega d\omega. \quad (5.32)$$

Podobně zpětná Laplaceova transformace \bar{I}_r v rovnici (5.27) je

$$\bar{I}_r(r, z, t) = H(t-t_A) \frac{2}{\pi} \Im \int_0^{\pi/2} \xi E_r[\xi(\omega, t; r, z)] \xi \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_\omega \cos(\omega) d\omega. \quad (5.33)$$

Zpětné Laplaceovy transformace \bar{I}_z a \bar{I}_r jsou tedy nalezeny.

2. Transformace proměnné ω na ξ

Integrály v rovnicích (5.32) a (5.33) jsou nevhodné pro numerické výpočty, protože ξ je svázáno s ω implicitní funkcí [(5.28)]. Avšak probíhá-li sumace (j) od 1 do 2, existuje explicitní výraz pro $\partial \xi / \partial t$; existují-li však více než dvě odmocniny $\sqrt{\xi^2 + a_j^2}$, není toto možné. Je tedy žádoucí transformovat proměnnou ω do ξ podle vzorce (5.28). Tato druhá změna je další hlavní částí Cagniardovy metody

(Cagniard, 1939, kapitola 5-5).

Pro $r \neq 0$ dostaneme z rovnice (5.28)

$$\cos(\omega) = \frac{-t + \sum_j z_j (\xi^2 + a_j^2)^{1/2}}{i\xi r} \quad (5.34)$$

Je-li $\xi=0$, pravá strana výše uvedené rovnice je neurčitá, neboť $t = \sum_j (z_j a_j)$ v $\xi=0$. Pomocí l'Hospitalova pravidla dostaneme $\cos(\omega) \rightarrow 0$ ($\omega \rightarrow \pi/2$), když $\xi \rightarrow 0$. Je-li $\omega=0$, zjistíme, že $\xi = \xi_1(t)$, kde ξ_1 je vypočteno z následující rovnice pro dané t

$$-t = i\xi_1 r - \sum_j z_j (\xi_1^2 + a_j^2)^{1/2} \quad (5.35)$$

Odtud je rovnice (5.32) transformována

$$\bar{I}_z(r, z, t) = H(t-t_A) \frac{2}{\pi} \Re \int_{\xi_1}^0 E_z(\xi) \xi \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_\omega d\xi.$$

Z rovnice (5.28) je zřejmé, že

$$(\partial \xi / \partial t)_\omega (\partial \omega / \partial \xi)_t = -1 / (i\xi r \sin(\omega)) = -1 / iK,$$

kde

$$K(\xi; r, z, t) = \sqrt{\xi^2 r^2 + \left[t - \sum_j z_j \sqrt{\xi^2 + a_j^2} \right]^2} \quad (5.36)$$

Konečný výraz je

$$I_z(r, z, t) = H(t-t_A) \frac{2}{\pi} \Im \int_0^{\xi_1(t)} E_z(\xi) \frac{\xi}{K(\xi; r, z, t)} d\xi. \quad (5.37)$$

Podobně

$$I_r(r, z, t) = H(t-t_A) \frac{2}{\pi r} \Im \int_0^{\xi_1(t)} \xi E_r(\xi) \frac{-t + \sum_j z_j (\xi^2 + a_j^2)^{1/2}}{K(\xi; r, z, t)} d\xi. \quad (5.38)$$

Integrace v rovnicích (5.37) a (5.38) je prováděna v komplexní rovině ξ podél dráhy $AM\xi_1$ (viz obr.6). $K(\xi)$ je mnohoznačné a má bod rozvětvení v $\xi = \xi_1$. Jednoznačností je

dosaženo řezem od ξ_1 ; $K(\xi)$ je kladné, je-li $\Re[\xi]$ kladná. Tímto řezem může být libovolná křivka od ξ_1 k druhému kvadrantu ξ -roviny (řez není zobrazen na obr.6).

Poznamenejme, že až na výběr integračních cest se zde uváděná odvození přísně přidrží Cagniarda (1936, kapitola 5-5A). Dáváme přednost integračním cestám, které leží v prvním kvadrantu komplexní roviny ξ , poněvadž tento přístup se shoduje s komplexní analýzou většiny počítačových algoritmů.

Výrazy pro $u_z(t)$ a $u_r(t)$ jsou určeny z rovnice (5.23) konvolucí. Například, máme-li všesměrový bodový zdroj s časovou funkcí $f(t)$ (tab.I), dostaneme

$$s^3 \bar{F}(s) = s^2 \bar{f}(s) / 4\pi c^2 . \quad (5.39)$$

Zpětná transformace je

$$[f''(t) + f'(0)\delta(t) + f(0)\delta'(t)] / 4\pi c^2 . \quad (5.40)$$

Výchylky $u_\alpha(\alpha=r, z)$ jsou

$$u_\alpha(r, z, t) = \frac{H(t-t_A)}{4\pi c^2} \left[\int_0^t f''(t-\tau) I_\alpha(r, z, \tau) d\tau + f'(0) I_\alpha(r, z, t) + f(0) \frac{\partial}{\partial t} I_\alpha(r, z, t) \right] , \quad (5.41)$$

kde $I_z(t)$ a $I_r(t)$ jsou dány rovnicemi (5.37) a (5.38).

Rovnice (5.41) určuje tranzientní výchylky pro vlny putující podél specifické zobecněné paprskové dráhy. Celková odezva je potom získána součtem řešení pro vlny podél všech možných drah. Podrobnosti jsou uvedeny v kapitole VII.

C. Odezva bodového zdroje z řešení přímkového zdroje

Podobnost mezi řešeními pro vlny generované přímkovým zdrojem a bodovým zdrojem byla probírána v kapitole IV (na tuto kapitolu se odvoláváme). Ve skutečnosti už Lamb (1904) poznamenal, že bodový zdroj by mohl být generován superpozicí přímkových zdrojů rovnoměrně rozložených ve všech směrech

a procházejících bodem zdroje. Avšak do nedávna nebyl znám příslušný matematický vztah (Than a Pao, 1970; Dampney, 1971).

Than a Pao (1970) ukázali, že řešení osově symetrického bodového zdroje v souřadnicích (r, z) může být odvozeno superpozicí, ne přímo z dvourozměrného řešení v souřadnicích (x, z) , ale x -ových derivací Hilbertovy transformace odpovídajících řešení pro přímkový zdroj. Řadou matematických úprav odvodili dva vzorce

$$u_r(r, z, t) = \frac{-1}{\pi r} \int_r^\infty \frac{\partial u_x(x, z, t)}{\partial x} \frac{x}{\sqrt{x^2 - r^2}} dx, \quad (5.42)$$

$$u_z(r, z, t) = \frac{-1}{\pi} \int_r^\infty \frac{\partial u_z(x, z, t)}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{x^2 - r^2}} dx,$$

u_r a u_z na levé straně výše uvedených rovnic jsou výchylky vyvolané osově symetrickým bodovým zdrojem; u_x a u_z uvnitř integrálů jsou výchylky vyvolané přímkovým zdrojem.

Aplikujeme-li předchozí vzorce na rovnici (4.9) pro přímkový zdroj, obdržíme

$$u_r(r, z, t) = \frac{-2A}{\pi r} H(t - t_A) \int_{t_A}^t f^{(n+1)}(t - \tau) \times \Im \int_r^\infty \frac{x \xi E_x(\xi)}{\sqrt{x^2 - r^2}} \frac{\partial \xi}{\partial x} dx d\tau, \quad (5.43)$$

$$u_z(r, z, t) = \frac{-2A}{\pi} H(t - t_A) \int_{t_A}^t f^{(n+1)}(t - \tau) \times \Re \int_r^\infty \frac{E_z(\xi)}{\sqrt{x^2 - r^2}} \frac{\partial \xi}{\partial x} dx d\tau.$$

Poznamenejme, že klíčovým krokem v tomto odvození je

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\xi_1} E(\xi) \xi \, d\xi = [E(\xi)]_{\xi=\xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} = \xi_1 E(\xi_1) \frac{\partial \xi_1}{\partial x} . \quad (5.44)$$

Integrační proměnná x je potom změněna na ξ podle rovnice (4.3); meze integrace jsou $\xi \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \infty$) a $\xi \rightarrow \xi_1(r, t)$ ($x \rightarrow r$), kde ξ_1 je určeno z

$$ir\xi_1 = \sum_j z_j (\xi_1^2 + a_j^2)^{1/2} - t . \quad (5.45)$$

Z rovnice (4.3) tedy vyplývá

$$\xi^2(x^2 - r^2) = -\xi^2 r^2 - \left[t - \sum_j z_j (\xi_1^2 + a_j^2)^{1/2} \right]^2 = -K^2(\xi; r, z, t) . \quad (5.46)$$

$K(\xi; r, z, t)$ je přesně to, které bylo definováno v rovnici (5.36). Substituce výše uvedených výsledků do rovnice (5.43) vede na

$$u_r(r, z, t) = \frac{2A}{\pi r} H(t - t_A) \int_{t_A}^t f^{(n+1)}(t - \tau) \times \Im \int_0^{\xi_1} \xi E_x(\xi) \frac{\partial K(\xi; r, z, \tau)}{\partial \tau} \, d\xi \, d\tau , \quad (5.47)$$

$$u_z(r, z, t) = \frac{2A}{\pi} H(t - t_A) \int_{t_A}^t f^{(n+1)}(t - \tau) \times \Im \int_0^{\xi_1} \xi E_z(\xi) \frac{1}{K(\xi; r, z, \tau)} \, d\xi \, d\tau .$$

Tyto výsledky jsou v úplné shodě s výsledky, které jsou vyjádřeny rovnicemi (5.37) až (5.41), kde $n=1$ a $f'(0)=f(0)=0$. Tato analýza tedy ukazuje, že $E_x(\xi)=E_r(\xi)$, a $E_z(\xi)$ jsou stejné jak pro řešení přímkového zdroje tak pro řešení bodového zdroje.

Porovnáním rovnic (5.47) s rovnicemi (4.9) zjistíme, že odezva vyvolaná osově symetrickým bodovým zdrojem a odezva vyvolaná přímkovým zdrojem ve stejném prostředí může být vypočtena stejným počítačovým algoritmem; rozdíly jsou

v činitelích $\partial K/\partial \tau$ a $1/K$. Avšak pro asymetrická zatížení musí být provedeny zpětné transformace tak, jak jsou popsány v kapitole V.B, a odezvy nemohou být snadno odvozeny z odezev pro přímkový zdroj a osově symetrický zdroj.

D. Řešení pro bodový zdroj v neohraničeném prostředí

Toto je poučná aplikace obecného řešení odvozeného v předchozích částech na jednoduchý problém bodového všesměrového zdroje v nekonečném prostředí [(2.32)]. Laplaceův obraz řešení pro potenciál $\bar{\phi}$ je [(2.35)]

$$\bar{\phi}(r, z, s) = \frac{1}{4\pi c^2} s\bar{f}(s)\bar{I}_\phi(r, z, s) , \quad (5.48)$$

$$\bar{I}_\phi(r, z, s) = \int_0^\infty \frac{1}{\eta} e^{-s\eta|z-z_0|} J_0(s\xi r) \xi \, d\xi . \quad (5.49)$$

Porovnáním \bar{I}_ϕ s \bar{I}_z v rovnici (5.24) dostaneme

$$E_z(\xi) = 1/\eta = 1/(\xi^2 + c^{-2})^{1/2} , \quad h(\xi, z) = \eta|z-z_0| . \quad (5.50)$$

Podle rovnice (5.37) je zpětná transformace \bar{I}_ϕ

$$I_\phi(r, z, t) = H(t-t_A) \frac{2}{\pi} \Im \int_0^{\xi_1(t)} \frac{\xi}{\eta K(\xi; r, z, t)} \, d\xi , \quad (5.51)$$

kde podle rovnice (5.36)

$$\begin{aligned} K &= \sqrt{\xi^2 r^2 + (t - \eta|z-z_0|)^2} \\ &= \sqrt{\eta^2 R^2 - 2t|z-z_0|\eta + t^2 - r^2/c^2} \end{aligned} \quad (5.52)$$

a

$$R^2 = r^2 + (z-z_0)^2 . \quad (5.53)$$

Horní mez integrace ξ_1 je určena z rovnice (5.35), která může být řešena analyticky

$$\xi_1(t) = R^{-2} \sqrt{|z-z_0| \sqrt{t-R^2/c^2} + irt} \quad . \quad (5.54)$$

Integrace v rovnici (5.51) může být provedena následovně

$$\begin{aligned} & \Im \int_0^{\xi_1} \frac{\xi}{\eta K(\xi; r, z, t)} d\xi \\ &= \frac{1}{2} \Im \int_0^{\xi_1} \frac{d(\xi^2 + c^{-2})}{\eta K(\xi; r, z, t)} \\ &= \Im \int_{\eta_0}^{\eta_1} \frac{d\eta}{\sqrt{\eta^2 R^2 - 2t|z-z_0|\eta + t^2 - r^2/c^2}} \\ &= \Im \left[\frac{1}{R} \sinh^{-1} \left(\frac{R^2 \eta - t|z-z_0|}{r \sqrt{t^2 - R^2/c^2}} \right) \right]_{\eta_0}^{\eta_1} = \frac{1}{R} \frac{\pi}{2} H(t - \frac{R}{c}) \quad . \quad (5.55) \end{aligned}$$

Poznamenejme, že dolní mez $\eta_0 = \eta(0) = 1/c$ je reálná, k imaginární části řešení tedy nepřispívá. Horní mez $\eta_1 = (\xi_1^2 + c^{-2})^{1/2}$ je vypočtena z rovnice (5.54)

$$\eta_1 = R^{-2} \left[t|z-z_0| + ir \sqrt{t^2 - R^2/c^2} \right] \quad . \quad (5.56)$$

Výsledkem integrace je $\sinh^{-1}(i) = i\pi/2$. Substitucí rovnice (5.55) do (5.51) dostaneme

$$I_\phi(r, z, t) = \frac{1}{R} H(t - t_M) = \frac{1}{R} H(t - \frac{R}{c}) \quad . \quad (5.57)$$

Pro tento zdrojový paprsek, $t_A < t_M = R/c$.

Zpětná transformace $\bar{\phi}$ v rovnici (5.49) je nalezena konvolucí. Poněvadž zpětná transformace $s\bar{f}(s)$ je $f'(t) + f(0)\delta(t)$, získáme, je-li $f(0) = 0$,

$$\phi(r, z, t) = \frac{1}{4\pi c^2} \int_0^t f'(t-\tau) \frac{1}{R} H(\tau - \frac{R}{c}) d\tau$$

$$= \frac{1}{4\pi c^2 R} \int_{R/c}^t f'(t-\tau) d\tau \quad . \quad (5.58)$$

S $f(0)=0$ je konečný výraz

$$\phi(r, z, t) = \frac{f(t-R/c)}{4\pi c^2 R} \quad . \quad (5.59)$$

Z $\phi(r, z, t)$ můžeme určit radiální výchylku u_R

$$u_R = \frac{\partial \phi}{\partial R} = \frac{-1}{4\pi c^2} \left[\frac{1}{cR} f'(t-\frac{R}{c}) + \frac{1}{R^2} f(t-\frac{R}{c}) \right] \quad . \quad (5.60)$$

V cylindrických souřadnicích, $R=[r^2+(z-z_0)^2]^{1/2}$,

$$u_r = \frac{r}{R} u_R \quad , \quad u_z = \frac{z-z_0}{R} u_R \quad . \quad (5.61)$$

Výsledek v rovnici (5.59) můžeme ovšem získat přímo z $\bar{\phi}(R, t)$ [(6.8)]. Tento příklad ukazuje, že pro nepatrně komplikovanější funkce E_z a $h(\xi; z)$ než funkce v rovnici (5.50) je získání uzavřeného tvaru integrace nemožné a lze potom uplatnit pouze numerickou integraci.

VI. Obecná řešení pro bodový zdroj

Elastické vlny generované šikmo působící koncentrovanou silou nebo nějakým jiným asymetrickým bodovým zdrojem jako dvojice sil, dvě síly na jedné nositelce atd. musí být reprezentovány všemi třemi potenciály ϕ , ψ , χ v rovnicích (2.11)-(2.14). Okrajové podmínky jsou následující :

spojitost napětí τ_{zz} , τ_{zr} , $\tau_{z\varphi}$ a výchylek u_r , u_φ , u_z na rozhraní $z=z_1$ ($i=1,2,\dots$) ve všech časech.

Poněvadž musí být tyto podmínky splněny pro všechny hodnoty r a φ , spojitost výchylek a napětí na celé hranici vyžaduje spojitost následujících šesti veličin (Chandra, 1968)

$$\begin{aligned} \tau_{zz} &: \frac{\lambda}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial z \partial t^2} \right), \\ \tau_{zr}, \tau_{z\varphi} &: \mu \left(2 \frac{\partial \phi}{\partial z} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right), \quad \mu \frac{\partial \chi}{\partial z} \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} u_z &: \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \\ u_r, u_\varphi &: \phi + \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \chi. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Na volném povrchu se musí veličiny v rovnici (6.1) rovnat nule.

Podle rovnice (2.13) je vektor výchylek odvozený z potenciálu χ $[\partial\chi/r\partial\varphi, -\partial\chi/\partial r, 0]$ rovnoběžný s rovinou $z=\text{konstanta}$. Odpovídající vlnový pohyb je označen jako SH-vlna. Mimoto χ není v žádném vztahu ke zbývajícím dvěma potenciálům v okrajových podmínkách (6.1) a (6.2). Proto jsou po dopadu SH-vlny, která je reprezentována χ , na rozhraní dvou vrstev odražené a prošlé vlny také horizontálně polarizované. Celkový vlnový pohyb může být potom rozdělen do dvou částí : P- a SV-vlny reprezentované ϕ a ψ a SH-vlna reprezentovaná χ . Každá část se odráží a láme na vrstvách nezávisle na sobě.

A. Zobecněné paprsky pro libovolně orientovanou sílu

Nechť koncentrovaná síla o časovém průběhu $f(t)$ působí ve vnitřním bodě $z=z_0$ ve směru jednotkového vektoru \mathbf{a} . Jestliže \mathbf{e}_i ($i=1,2,3$) označuje jednotkové vektory ve směru x, y, z a $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$ jednotkové vektory v cylindrických souřadnicích, potom (obr.13)

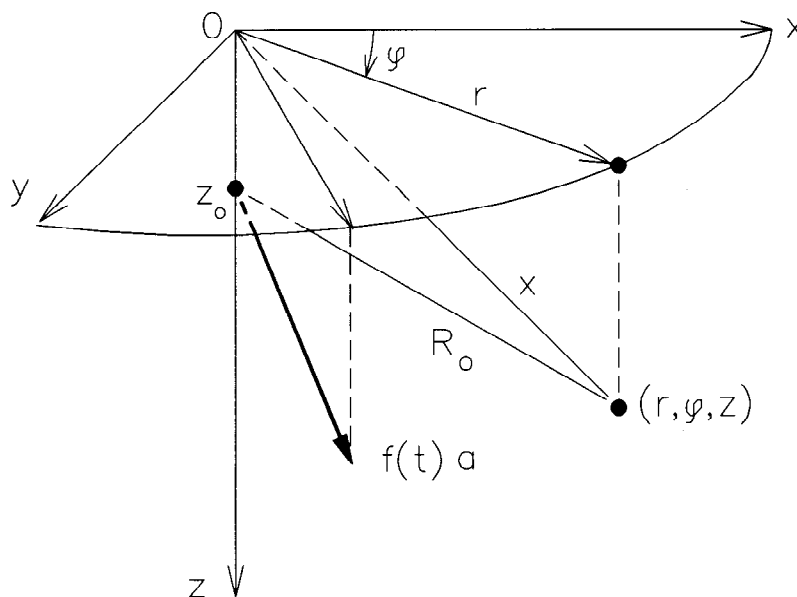
$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 = a_r \mathbf{e}_r + a_\varphi \mathbf{e}_\varphi + a_z \mathbf{e}_z \quad (6.3)$$

kde

$$a_r = a_1 \cos(\varphi) + a_2 \sin(\varphi) ,$$

$$a_\varphi = -a_1 \sin(\varphi) + a_2 \cos(\varphi) ,$$

$$a_z = a_3 .$$



Obr.13 Geometrie šikmé, koncentrované síly

1. Zdrojové funkce

Je-li $f(t)$ časová harmonická funkce [tj. $f(t)=\exp(-i\omega t)$], je Greenova dyáda pro elastické vlny (Morse a Feshbach, 1953, str. 1783)

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0, \omega) = \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \times \left\{ \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{I} g_s(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0, \omega) - \nabla \left[g_p(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0, \omega) - g_s(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0, \omega) \right] \nabla \right\}, \quad (6.4)$$

kde

$$g_p(\omega) = e^{i\omega R/c}/R, \quad g_s(\omega) = e^{i\omega R/c}/R, \quad (6.5)$$

a

$$R = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

Fyzikálně reprezentují složky dyády $\mathbf{G}_{mn}(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0, \omega)$ výchylky v \mathbf{x} ve směru osy x_n vyvolané harmonickou koncentrovanou objemovou silou působící v bodě \mathbf{x}_0 ve směru osy x_m . Pole výchylek generované jednoduchou koncentrovanou silou ve směru \mathbf{a} je potom $\mathbf{u}_0(\omega)\exp(-i\omega t)$, kde

$$\mathbf{u}_0(\omega) = \mathbf{G} \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \left\{ \mathbf{a} \frac{\omega^2}{c^2} g_s(\omega) - \nabla(\mathbf{a} \cdot \nabla) \left[g_p(\omega) - g_s(\omega) \right] \right\}. \quad (6.6)$$

Předchozí řešení může být snadno převedeno na Laplaceův obraz pole výchylek $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, s)$ vyvolané koncentrovanou silou $f(t)\mathbf{a}$, která působí v bodě $(0, 0, z_0)$. Záměnou ω za is dostaneme

$$\bar{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}, s) = \frac{\bar{f}(s)}{4\pi\rho s^2} \left\{ \nabla(\mathbf{a} \cdot \nabla) g_p(s) - \left[\nabla(\mathbf{a} \cdot \nabla) - \frac{s^2}{c^2} \mathbf{a} \right] g_s(s) \right\}, \quad (6.7)$$

kde

$$g_p(s) = \frac{e^{-sR_0/c}}{R_0} = s \int_0^\infty \frac{\xi}{\eta} e^{-s\eta|z-z_0|} J_0(s\xi r) d\xi,$$

$$g_s(s) = \frac{e^{-sR_0/c}}{R_0} = s \int_0^\infty \frac{\xi}{\zeta} e^{-s\zeta|z-z_0|} J_0(s\xi r) d\xi,$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-z_0)^2}. \quad (6.8)$$

Dva integrály v rovnici (6.8) jsou dobře známé Sommerfeldovy

integrální reprezentace radiálních vlnových funkcí. Původ integrálu $g_p(s)$ plyne přímo z rovnice (2.32) a (2.35).

Poněvadž v cylindrických souřadnicích

$$\mathbf{a} \cdot \nabla = a_r \frac{\partial}{\partial r} + a_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + a_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (6.9)$$

a obě funkce $g_p(s)$ a $g_s(s)$ jsou nezávislé na φ , dostaneme tři složky $\bar{u}_0(\mathbf{x}, s)$ jako

$$\begin{aligned} \bar{u}_{0r} &= \frac{\bar{f}(s)}{4\pi\rho s^2} \left[\left(a_r \frac{\partial^2}{\partial r^2} + a_z \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \right) (g_p - g_s) + a_r \frac{s^2}{c^2} g_s \right], \\ \bar{u}_{0\varphi} &= \frac{\bar{f}(s)}{4\pi\rho s^2} a_\theta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (g_p - g_s) + \frac{s^2}{c^2} g_s \right], \\ \bar{u}_{0z} &= \frac{\bar{f}(s)}{4\pi\rho s^2} \left[\left(a_r \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} + a_z \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (g_p - g_s) + a_z \frac{s^2}{c^2} g_s \right]. \end{aligned} \quad (6.10)$$

$\bar{u}_0(\mathbf{x}, s)$ může být odvozeno od potenciálů $\bar{\phi}(\mathbf{x}, s)$, $\bar{\psi}(\mathbf{x}, s)$ a $\bar{\chi}(\mathbf{x}, s)$ vyhodnocením rovnice (6.10) v (2.13). Výsledky jsou

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_0(s) &= \frac{\bar{f}(s)}{4\pi\rho s^2} (\mathbf{a} \cdot \nabla) g_p \\ &= a_z s^2 \bar{F}(s) \int_0^\infty S_p(\xi) e^{-s\eta|z-z_0|} J_0(s\xi r) \xi \, d\xi \\ &\quad + a_r s^2 \bar{F}(s) \int_0^\infty S'_p(\xi) e^{-s\eta|z-z_0|} J_1(s\xi r) \xi \, d\xi, \\ \bar{\psi}_0(s) &= -a_z s \bar{F}(s) \int_0^\infty S_v(\xi) e^{-s\zeta|z-z_0|} J_0(s\xi r) \, d\xi \\ &\quad - a_r s \bar{F}(s) \int_0^\infty S'_v(\xi) e^{-s\zeta|z-z_0|} J_1(s\xi r) \, d\xi, \\ \bar{\chi}_0(s) &= -a_\theta s^2 \bar{F}(s) \int_0^\infty S_H(\xi) e^{-s\zeta|z-z_0|} J_1(s\xi r) \, d\xi, \end{aligned} \quad (6.11)$$

kde $\bar{F}(s) = \bar{f}(s) / 4\pi\rho s^2$. Zdrojové funkce S_p , S'_p , S_v , S'_v a S_H jsou uvedeny v tabulce IV. Poznamenejme, že, je-li \mathbf{a} shodné s osou z ($a_z=1$ a $a_r=a_\varphi=0$), předchozí výsledky se redukují na řešení osově symetrického problému [(2.23) a (2.35)].

Tabulka IV

Zdrojové funkce pro šikmou koncentrovanu sílu [(6.11)]

Zdrojové funkce		uvnitř ^a	na povrchu ^b z=0
S(ξ)	P	-ε	-1+R ^{PP} +(ξ/ζ)R ^{SP}
	V	ξ/ζ	(ξ/ζ)(1+R ^{SS})+R ^{PS}
S'(ξ)	P	-ξ/η	-(ξ/η)(1+R ^{PP})-R ^{SP}
	V	ε	1-R ^{SS} -(ξ/η)R ^{PS}
S _H (ξ)		1/ζC ²	(1+R ^H)/(ζC ²)

a) ε=±1, jestliže paprsek míří do směru ±z

b) R^{PP}, ..., R^{SS} jsou dány rovnicí (3.11); R^H rovnicí (6.14)

2. Odražené a prošlé paprsky

Zobecněné paprsky pro odražené a prošlé vlny mohou být potom sestrojeny podobně jako paprsky ve dvourozměrném případě (kapitola III). V analogii k rovnicím (3.3) a (3.4) získáme tři potenciály podél každé paprskové dráhy (Müller, 1969)

$$\bar{\phi}(s) = a_z s^2 \bar{F}(s) \int_0^\infty S \Pi e^{-sh(\xi, z)} J_0(s\xi r) \xi d\xi + a_r s^2 \bar{F}(s) \int_0^\infty S' \Pi e^{-sh(\xi, z)} J_1(s\xi r) \xi d\xi ,$$

$$\bar{\psi}(s) = -a_z s \bar{F}(s) \int_0^\infty S \Pi e^{-sh(\xi, z)} J_0(s\xi r) d\xi - a_r s \bar{F}(s) \int_0^\infty S' \Pi e^{-sh(\xi, z)} J_1(s\xi r) d\xi ,$$

$$\bar{\chi}(s) = -a_\theta s^2 \bar{F}(s) \int_0^\infty S_H \Pi e^{-sh(\xi, z)} J_1(s\xi r) d\xi . \quad (6.12)$$

Fázová funkce $h(\xi, z)$ je definována rovnicí (5.18) a může být napsána jako

$$h(\xi, z) = \sum_{k=1}^n h_k \sqrt{\xi^2 + a_k^2} \quad (6.13)$$

kde n je počet úseků paprsku, h_k je projekce k -tého úseku paprsku na osu z , a_k je pomalost (reciproká hodnota rychlosti) podél k -tého úseku paprsku a $\bar{F}(s) = \bar{f}(s)/4\pi\rho s^2$.

Pro spojené P-SV-vlny je S a S' buď P-zdroj (S_p a S'_p) nebo SV-zdroj (S_v a S'_v) podle módu prvního úseku zobecněného paprsku. Π je průběžný součin $n-1$ koeficientů odrazu a přestupu daných v kapitole III.B. Zda je paprsek P (ϕ) nebo SV (ψ) závisí na módu posledního segmentu.

Pro SH-vlnu je S_H zdrojová funkce v rovnici (6.11). Π_H je součin $n-1$ koeficientů odrazu a přestupu SH-vln, které jsou

$$\begin{aligned} R^H &= \frac{\mu_2 \zeta_2 - \mu_1 \zeta_1}{\mu_1 \zeta_1 + \mu_2 \zeta_2} \quad , \quad \zeta_1 = \sqrt{\xi^2 + C_1^{-2}} \quad , \\ T^H &= \frac{2\mu_2 \zeta_2}{\mu_1 \zeta_1 + \mu_2 \zeta_2} \quad , \quad \zeta_2 = \sqrt{\xi^2 + C_2^{-2}} \quad . \end{aligned} \quad (6.14)$$

Index 2 u μ resp. C označuje modul pružnosti ve smyku resp. rychlost příčné vlny ve zdrojovém prostředí a index 1 je pro přilehlé prostředí. Pro volný povrch platí $R^H=1$.

Výchytky mohou být vypočteny z rovnice (6.12) podle vztahu (2.13). Vzдор rozdílům v potenciálech $\bar{\phi}$ a $\bar{\psi}$ mohou být výchytky pro P nebo SV-vlnu vyjádřeny stejnou integrální formou s různými přijímacími funkcemi (Müller, 1969):

P- nebo SV-vlna :

$$\begin{aligned} \bar{u}_r(s) &= a_z s^3 \bar{F}(s) \int_0^\infty S \Pi \text{De}^{-sh} \xi J_1 \, d\xi \\ &- a_r s^3 \bar{F}(s) \int_0^\infty S' \Pi \text{De}^{-sh} \xi J_0 \, d\xi - \frac{a_r}{a_\psi} \bar{u}_\psi(s), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{u}_\varphi(s) &= -a \frac{s^2}{r} \bar{F}(s) \int_0^\infty s' \Pi D e^{-sh} \xi J_1 d\xi, \\ \bar{u}_z(s) &= a_z s^3 \bar{F}(s) \int_0^\infty S \Pi D e^{-sh} \xi J_0 d\xi \\ &+ a_r s^3 \bar{F}(s) \int_0^\infty s' \Pi D e^{-sh} \xi J_1 d\xi; \end{aligned} \quad (6.15)$$

SH-vlna :

$$\begin{aligned}\bar{u}_r(s) &= a \frac{s^2}{r} \bar{F}(s) \int_0^\infty S_H \Pi_H D_H e^{-sh} J_1 d\xi, \\ \bar{u}_\varphi(s) &= -a \frac{s^3}{r} \bar{F}(s) \int_0^\infty S_H \Pi_H D_H e^{-sh} \xi J_0 d\xi + \frac{a}{a_r} \bar{u}_r(s), \\ \bar{u}_z(s) &= 0. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Přijímací funkce D tří výchylek pro P- nebo SV-vlnu jsou soustředěny v tabulce V.

Z rovnic (6.15) a (6.16) je vidět, že paprskové integrály pro všechny výchylky jsou buď ve tvaru \bar{I}_z v rovnici (5.24) nebo \bar{I}_r v rovnici (5.25). Zpětná Laplaceova transformace může být tedy nalezena stejně jako v kapitole V.B.

Tabulka V

Přijímací funkce D a D_H pro výchylky [(6.15) a (6.16)]

	mód	uvnitř	na povrchu $z=0$
u_r nebo u_θ	P	$-\xi$	$-\xi(1+R^{PP})^* - \zeta R^{PS}$
	SV	$-\varepsilon \zeta$	$\zeta(1-R^{SS}) - \xi R^{SP}$
	SH	1	$1 + R^H = 2$
u_z	P	$-\varepsilon \eta$	$\eta(1-R^{PP}) - \xi R^{PS}$
	SV	$-\xi$	$-\xi(1+R^{SS}) - \eta R^{SP}$

B. Dodatečné zdrojové funkce

Kromě bodového zdroje [(2.32)], vertikální síly [(2.33)] a šikmé koncentrované síly [(6.11)] existuje mnoho jiných objemových sil, které se často používají k modelování defektů materiálu, trhlin nebo zlomů. V této kapitole budou probírány případy dvou sil na jedné nositelce, dvojice sil a šikmé síly na povrchu. Případy impulsního napětí působícího na stěnu malé válcové dutiny (Brekhovskikh, 1960, str.305) a kulové dutiny (Ghosh, 1973; Gajewski, 1977) uvnitř vrstevnatého prostředí jsou sice také zajímavé, ale probírány zde nebudou.

1. Šikmá síla na volném povrchu

V kapitole II.B.3 byly probírány případy vertikální síly v nekonečném prostředí a vertikální síly na volném povrchu poloprostoru jako dva problémy s různými okrajovými podmínkami. Ve skutečnosti může být řešení druhého problému odvozeno od řešení problému prvního.

Zdrojové funkce pro vertikální sílu jsou dané rovnicemi (2.33), (2.35) a tabulkou I. P-vlna se zdrojovou funkcí S_p je odražena od povrchu poloprostoru ve formě PP- a PS-paprsku (viz obr.4 a 11). Podobně dopadající příčná vlna se zdrojovou funkcí S_v je odražena jako SP- a SS-paprsek. Blíží-li se z_0 k nule, dopadající P-paprsek splývá s odraženými paprsky PP a SP do formy přímého P-paprsku z povrchového zdroje do přijímače. Tři paprskové integrály mohou být potom sloučeny do jediného integrálu, jak je ukázáno pro $\bar{\phi}$ rovnicí (2.35) s $z_0=0$ a S_p je nahrazeno $S_p + S_p R^{PP} + S_v R^{SP}$. Z tabulky I zjistíme, že nová povrchová zdrojová funkce pro P-vlnu je

$$S_p(\text{povrchová}) = -1 + R^{PP} + \frac{\xi}{\zeta} R^{SP}. \quad (6.17)$$

Podobně dopadající S-paprsek je spojen s odraženými paprsky SS a PS do tvaru nové povrchové zdrojové funkce pro S-vlnu reprezentovanou $\bar{\psi}$

$$S_v(\text{povrchová}) = \frac{\xi}{\zeta} + \frac{\xi}{\zeta} R^{SS} + R^{PS}. \quad (6.18)$$

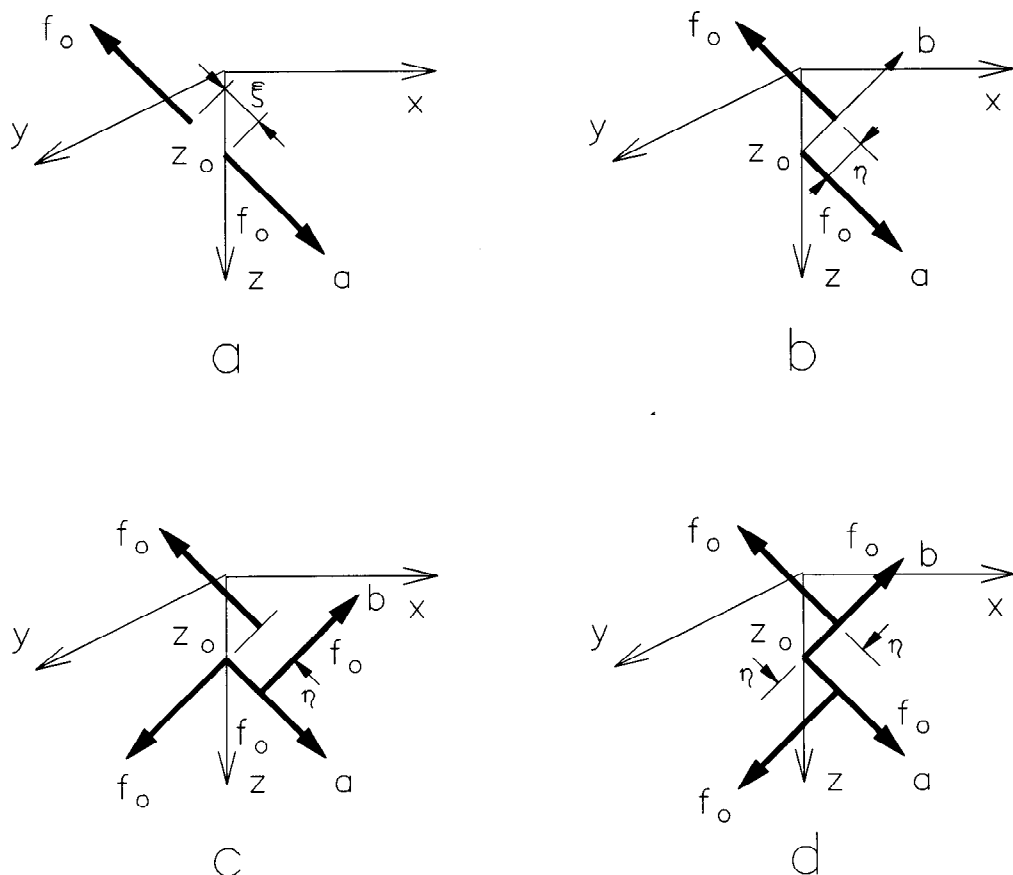
Substitucí koeficientů odrazu z rovnice (3.11) do předchozích rovnic získáme

$$S_p(\text{povrchová}) = 2(\xi^2 + \zeta^2)/(C^2 \Delta_r),$$

$$S_v(\text{povrchová}) = -4\eta\xi/(C^2 \Delta_r), \quad (6.19)$$

Poněvadž $C^2 = \mu/\rho$, jsou tyto výsledky v úplné shodě s výsledky uvedenými v tabulce I pro vertikální sílu na povrchu.

Zdrojové funkce pro šikmou sílu působící na povrchu poloprostoru mohou být odvozeny analogicky ze zdrojových funkcí v rovnici (6.11). Jsou uvedeny v tabulce IV.



Obr.14 Bodové zdroje v neohraničené pevné látce:
a) dvě síly na jedné nositelce; b) dvojice sil;
c) střed rotace; d) dvě dvojice sil bez momentu.

2. Dvě síly na jedné nositelce a dvojice sil

Konstrukce řešení pro dvě síly na jedné nositelce nebo pro dvojici sil (dvě síly s momentem) podél souřadnicových os z řešení pro koncentrovanou sílu je dobře známé (Love, 1944, kapitola 213; White, 1965). Řešení pro šikmé dvojité síly mohou být odvozena podobně.

Nechť $u(\mathbf{x}, t)$ je výchylka vyvolaná koncentrovanou silou f_0 v místě $(0, 0, z_0)$ ve směru jednotkového vektoru \mathbf{a} (obr.14). \mathbf{a} tvoří ortogonální trojici s dvěma dalšími jednotkovými vektory \mathbf{b} a \mathbf{c} . Řešení pro dvojité síly jsou následující :

a) Dvě síly na jedné nositelce

(dvě síly ve směru \mathbf{a} bez momentu)

$$u^a(\mathbf{x}, t) = -D(\mathbf{a} \cdot \nabla)u(\mathbf{x}, t) . \quad (6.20)$$

b) Dvojice sil

(dvě síly s momentem okolo \mathbf{c})

$$u^b(\mathbf{x}, t) = M(\mathbf{b} \cdot \nabla)u(\mathbf{x}, t) . \quad (6.21)$$

c) Střed rotace

(čtyři síly s momentem okolo \mathbf{c})

$$u^c(\mathbf{x}, t) = M \mathbf{c} \cdot [\nabla \times \mathbf{G}(\mathbf{x}, t)] . \quad (6.22)$$

V předchozích výsledcích D resp. M je síla dvou sil na jedné nositelce resp. dvojice sil

$$D = \lim_{\xi \rightarrow 0} (f_0 \xi) , \quad M = \lim_{\eta \rightarrow 0} (f_0 \eta) , \quad (6.23)$$

kde ξ je vzdálenost oddělující dvě síly podél směru \mathbf{a} a η vzdálenost oddělující dvě síly podél směru \mathbf{b} . $\mathbf{G}(t)$ je Greenova dyáda pro elastické vlny (Achenbach, 1973, kapitola 3.8: Pao a Varatharajulu, 1976),

$$\mathbf{u} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{G} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{a} ; \quad \mathbf{G}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega .$$

$\mathbf{G}(\omega)$ je dáno rovnicí (6.4).

Z rovnice (6.21) můžeme sestavit řešení pro dvě dvojice sil bez momentu (obr.14). Tento zdroj je podobný středu rotace až na to, že směry f_0 podél směrů b a $-b$ jsou obrácené.

d) Dvě dvojice sil bez momentu

$$u^d(\mathbf{x}, t) = M(\mathbf{b} \cdot \nabla)u(\mathbf{x}, t; \mathbf{a}) + M(\mathbf{a} \cdot \nabla)u(\mathbf{x}, t; \mathbf{b}) . \quad (6.24)$$

Tento zdroj je při vhodném výběru orientací \mathbf{a} a \mathbf{b} často používán k popisu pohybu zlomů při zemětřesení (Harkrider, 1976). Jiné zdroje vyvolané neelastickými deformacemi mohou být vytvořeny integrací Greenovy dyády (Willis, 1965).

Vyjdeme-li z výše uvedených rovnic, můžeme snadno odvodit cylindrické složky pro u . Například složky pro dvojici sil s jednotkovou silou ($M=1$) jsou

$$u_r^b = b_r \frac{\partial u}{\partial r} + b_\varphi \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{u}{r} \right) + b_z \frac{\partial u}{\partial z} ,$$

$$u_\theta^b = b_r \frac{\partial u}{\partial r} + b_\varphi \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \right) + b_z \frac{\partial u}{\partial z} ,$$

$$u_z^b = b_r \frac{\partial u}{\partial r} + b_{\varphi r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + b_z \frac{\partial u}{\partial z} . \quad (6.25)$$

b_r , b_φ a b_z jsou cylindrické složky jednotkového vektoru \mathbf{b} , které jsou definovány vztahem (6.3).

Poněvadž $\bar{u}_r(s)$, $\bar{u}_\varphi(s)$ a $\bar{u}_z(s)$ pro koncentrovanou sílu ve směru \mathbf{a} jsou dány rovnicemi (6.15) a (6.16) a lze nalézt jejich zpětné Laplaceovy transformace, můžeme potom určit $u^b(t)$ přímo z rovnice (6.25). Podrobnosti jsou uvedeny v Müllerovi (1969).

C. Přibližná analýza paprskových integrálů

Metoda zobecněného paprsku vyžaduje pro celkové řešení souhrn příspěvků od všech přicházejících paprsků. V mnoha

případech to znamená vypočítat ohromné množství paprskových integrálů a velké množství práce při numerické integraci. V některých případech stačí přibližné řešení spojené s efektivním výpočetním algoritmem.

V této kapitole budeme probírat dvě přibližné metody analýzy, jednou je "aproximace rovinnými vlnami" (Pekeris a kol., 1965; Helmlberger, 1972; Wiggins a Helmlberger, 1959), druhou je "aproximace prvními příchody" (Knoppof a Gilbert, 1959; Helmlberger, 1968; Müller, 1969). První metoda aproximuje sférickou vlnu generovanou bodovým zdrojem rovinnými vlnami, čehož je dosaženo nahrazením Besselových funkcí v paprskových integrálech jejich asymptotickým vyjádřením pro vysoké frekvence. Druhá metoda vyhodnocuje převládající část vlnového pohybu blízko okamžiku příchodu paprsku.

Dalším zjednodušením je důsledné používání Cagniardovy metody všude, kde je to možné. Poznamenejme, že pro řešení rovinného přetvoření [(3.16) a (3.17)] nebo pro osově symetrická řešení aproximovaná rovinnými vlnami [(5.23)] je Laplaceův obraz výchylky ve tvaru

$$\bar{u}_z(x, z, s) = A\bar{f}(s) \Re \int_0^{\infty} E_z(\xi) e^{s[g(x, z; \xi) - \varepsilon]} d\xi. \quad (6.26)$$

A je amplitudová konstanta a ε je fázová konstanta. Tento integrál může být vyhodnocen buď metodou stacionární fáze, anebo metodou stejné fáze. První metoda analyticky vyhodnocuje dominantní část integrálu, je-li fáze stacionární, tj. je-li $dg(x, z; \xi)/d\xi = 0$. Druhá metoda nahrazuje podmínku stacionární fáze podmínkou rovnosti fáze, tj. nalezení hodnoty ξ takové, že $t = -g(x, z; \xi)$. Po vyhodnocení integrálu ξ (přibližně) může být provedena zpětná Laplaceova transformace v uzavřeném tvaru (Wiggins, 1976; Chapman, 1976a; Wiggins a Madrid, 1974).

1. Aproximace rovinnými vlnami

Aproximace rovinnými vlnami předpokládá, že zdrojová funkce trvá krátký okamžik nebo dosahuje vysoké frekvence. V této metodě je Besselova funkce nahrazena prvním členem

svého asymptotického rozvoje.

Abychom to specifikovali, uvažujme problém bodového zdroje v kapitole V. Místo rovnice (5.22) použijeme první člen asymptotického rozvoje Besselovy funkce pro velké argumenty (National Bureau of Standards, 1964, rovnice 9.2.1),

$$J_0(s\xi r) = \sqrt{\frac{2}{\pi s \xi r}} \cos(s\xi r - \frac{\pi}{4}) .$$

To můžeme přepsat jako

$$J_0(s\xi r) = \Re \sqrt{\frac{2}{\pi i s \xi r}} e^{i s \xi r} , \quad (6.27)$$

kde jsme uvažovali $-i = \exp(-i\pi/2)$.

Tato aproximace potom redukuje $\bar{I}_z(s)$ v rovnici (5.24) do tvaru jako $\bar{u}(s)$ v rovnici (4.1) až na součinitel $(i s \xi r)^{-1/2}$. Pomocí transformace

$$-\tau = i \xi r - \sum_j z_j \sqrt{\xi^2 + a_j^2} \quad (6.28)$$

je inverze $I_z(r, z, s)$ bez součinitele $s^{-1/2}$ nalezena inspekci. Poněvadž zpětná transformace $s^{-1/2}$ je $(\pi t)^{-1/2}$, nalezneme konečný výsledek zpětné Laplaceovy transformace $\bar{I}_z(r, z, s)$ pomocí konvoluce

$$I_z(r, z, t) = H(t-t_A) \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \Im \int_{t_A}^t E_z(\xi) \sqrt{\frac{i\xi}{\pi}} \frac{d\xi}{dt} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} . \quad (6.29)$$

ξ v integrandu je funkcí τ [(6.28)].

Jestliže je proměnná τ transformována zpátky do ξ podle vztahu (6.28), dostaneme [podobně jako změna (4.7) na (4.9)]

$$I_z(r, z, t) = H(t-t_A) \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \Im \int_0^{\xi_1(t)} E_z(\xi) \sqrt{\frac{i\xi}{\pi}} \frac{d\xi}{\sqrt{t-\tau(\xi)}} , \quad (6.30)$$

kde $\xi_1(t)$ je získáno řešením ξ pro $\tau=t$ v rovnici (6.28).

Porovnáním rovnice (6.30) s přesným řešením v rovnici (5.37) zjistíme, že aproximace rovinnými vlnami je ekvivalentní následující aproximaci činitele K

$$K(\xi; r, z, t) \cong \sqrt{-2i\xi r} \sqrt{t-\tau} . \quad (6.31)$$

To může být odvozeno přímo, vyjdeme-li nejprve z rovnice (5.36) pro K

$$K(\xi; r, z, t) = \sqrt{\left(t - \sum_j z_j \eta_j - i\xi r\right) \left(t - \sum_j z_j \eta_j - i\xi r\right)} \quad (6.32)$$

kde $\eta_j = (\xi^2 + a_j^2)^{1/2}$. Vzhledem k rovnici (6.28) potom dostaneme

$$K(\xi; r, z, t) = \sqrt{[t-\tau(\xi)-2i\xi r][t-\tau(\xi)]} . \quad (6.33)$$

V případě krátkého trvání pozorování a při vlnách s vysokofrekvenčními složkami ($s\xi r \gg 1$) platí následující podmínka

$$|t - \tau| \ll |2i\xi r| . \quad (6.34)$$

Proto se při této aproximaci redukuje rovnice (6.33) na rovnici (6.31).

Tato metoda má několik výhod :

- 1) Řešením je časový integrál, což umožňuje vypočítat integrandy pro každý paprsek před provedením závěrečné konvoluce.
- 2) Jakmile jsou integrandy vypočteny, mohou být porovnány relativní příspěvky jednotlivých paprsků a ty paprsky, jejichž příspěvek je malý, jsou vypuštěny.
- 3) Konvoluční faktor $1/\sqrt{t-\tau}$ může být analyticky sloučen se zdrojovou časovou funkcí a počet numerických integrací se tím zredukuje na jednu.

Metoda byla úspěšně použita k aproximaci přesných výsledků od Pekerise a kol. (1965) Helmbergerem (1972).

2. První pohyb vyvolaný lomeným paprskem

Aproximace prvním příchodem závisí na oddělení rychle se měnících částí od pomalu se měnících částí v integraci rovnice (6.29). Pro první pohyb "kónické vlny" je kritický bod $\xi_k = ia_k$, kde $a_k = 1/c_k$ a c_k je rychlost P-vlny v sousední vrstvě k (kapitola IV.B.2), na které dochází k lomu (tuto

vrstvu budeme dále nazývat refraktor). Potom je rychle se měnící funkce v rovnici (6.29) $\eta_k = (\xi^2 + a_k^2)^{1/2}$. V první řadě všechny ostatní funkce v integrandu mohou být potom uvažovány jako konstanty vyhodnocené při $\xi_k = ia_k$.

Nechť $R(\xi)$ je koeficient odrazu od lámající vrstvy. Rozložíme E_z v rovnici (6.29) jako

$$E_z(\xi) = E'_z(\xi)R(\xi), \quad (6.35)$$

kde $E'_z(\xi)$ neobsahuje žádný faktor s η_k . Podle rovnice (3.9) můžeme psát

$$R(\xi) = \frac{A(\xi_k) - \eta_k B(\xi_k)}{A'(\xi_k) + \eta_k A'(\xi_k)}, \quad (6.36)$$

kde A, B, A', B' jsou reálné konstanty (při $\xi = \xi_k$), které jsou určeny z aktuálního koeficientu odrazu (Helmberger, 1968).

Přesná tranzientní odezva [(5.41)] může být vyjádřena jako

$$u_z(r, z, t) = \frac{H(t-t_A)}{4\pi c^2} \int_0^t f'(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} I_z(r, z, \tau) d\tau + f(0) \frac{\partial}{\partial t} I_z(r, z, t). \quad (6.37)$$

Z rovnice (6.29) dostaneme

$$\frac{\partial I_z(r, z, t)}{\partial t} = H(t-t_A) \frac{1}{\pi \sqrt{r}} \Im \int_{t_A}^t \frac{\partial}{\partial \tau} \left[E_z(\xi) (i\xi)^{1/2} \frac{d\xi}{dt} \right] \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \quad (6.38)$$

Avšak rychle se měnící částí v integrandu je pouze $R(\xi)$.

Tedy

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[E_z(\xi) (i\xi)^{1/2} \frac{d\xi}{dt} \right] \cong E'_z(i\xi)^{1/2} \frac{d\xi}{dt} \frac{\partial R}{\partial \tau}.$$

V η_k

$$R(\xi) = \frac{1}{A'} \left[A - \eta_k \frac{BA' + B'A}{A'} \right]; \quad (6.39)$$

máme, $\eta_k = (\xi^2 + a_k^2)^{1/2}$,

$$\frac{\partial R}{\partial t} = - \frac{A' B + AB' \xi}{A'^2 \eta_k} \frac{d\xi}{dt} . \quad (6.40)$$

Pro výpočet η_k rozvineme ξ okolo ξ_k

$$\xi = ia_k + \frac{d\xi}{dt}(t-t_k) + \dots, \quad (6.41)$$

a dostaneme

$$\eta_k \cong (2ia_k \frac{d\xi}{dt})^{1/2} (t-t_k)^{1/2} . \quad (6.42)$$

Z rovnice (6.28) dostaneme

$$\left(\frac{dt}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_k} = -ir + \sum_j \frac{z_j \xi_k}{\sqrt{\xi_k^2 + a_j^2}} = -iL_k , \quad (6.43)$$

kde

$$L_k = r + \sum_j \frac{iz_j \xi_k}{\sqrt{\xi_k^2 + a_j^2}} .$$

L_k může být interpretováno jako délka vlnové cesty v refraktoru [(4.18)].

Substitucí rovnic (6.43) a (6.42) do rovnice (6.40) a potom do (6.38) dostaneme

$$\frac{\partial I_z(r, z, t)}{\partial t} = H(t-t_k) \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{r}} \Im \int_{t_k}^t \frac{A' B + AB'}{A'^2} \times \frac{\xi(-i\xi)^{1/2} E'(\xi)}{(2a_k L_k^3)^{1/2}} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau-t_k} \sqrt{t-\tau}} . \quad (6.44)$$

V této rovnici bylo t_A nahrazeno t_k , poněvadž jde o okamžik příchodu "kónické vlny".

Integrace rychle se měnící části je

$$\int_{t_k}^t \frac{d\tau}{\sqrt{\tau-t_k} \sqrt{t-\tau}} = \pi .$$

Zbývající část je konstantní, je-li ξ vyhodnoceno v $\xi=\xi_k=ia_k$. Výsledek je

$$\frac{\partial I_z(r, z, t)}{\partial t} = H(t-t_k) \sqrt{\frac{1}{rL_k^3}} \frac{A'B + AB'}{A'^2} E'(ia_k) a_k . \quad (6.45)$$

Z rovnice (6.37), je-li $f(0)=0$, konečně dostaneme

$$u_z(r, z, t) = H(t-t_k) f(t-t_k) \sqrt{\frac{1}{rL_k^3}} \frac{A'B + AB'}{A'^2} a_k E'(ia_k). \quad (6.46)$$

Tedy první pohyb vyvolaný "kónickou vlnou" má stejný časový průběh jako zdrojová funkce.

Ještě může existovat druhý příchod "kónické vlny" vyvolaný S-vlnou v refraktor. Nechť C_1 je tato fázová rychlost. L_1 se vypočte z rovnice (6.43) dosazením $\xi=\xi_1=i/C_1$. Jestliže $L_1>0$, dojde k příchodu lomené S-vlny a rychle se měnící funkce je $\eta_1=(\xi^2+C_1^{-2})^{1/2}$.

Následná analýza je do jisté míry podobná předchozí. A, A', B, B' a E'_z jsou však nyní komplexní konstanty vyhodnocené v $\xi=\xi_1$. Dále musíme vyhodnotit následující integrál

$$I_1 = \int_{t_k}^t \frac{d\tau}{\sqrt{\tau-t_1} \sqrt{t-\tau}} , \quad (6.47)$$

kde t_k je časová hodnota používaná pro rovnici (6.44). Z tabulky integrálů dostaneme

$$I_1 = -i \log \frac{|t-t_1|}{t_k^*} + \pi H(t-t_1) , \quad (6.48)$$

kde integrační konstanta je

$$t_k^* = 2[t_k^2 - t_k(t+t_1) - tt_1]^{1/2} + 2t_k - t - t_1 . \quad (6.49)$$

Tedy pro lomenou S-vlnu

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_z(r, z, t)}{\partial t} = & \frac{a_1}{(rL_k^3)^{1/2}} \left\{ H(t-t_1) \Re \left[\left(\frac{A'B + AB'}{A'^2} \right)_1 E'(ia_1) \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{\pi} \log \frac{|t-t_1|}{t_k^*} \Im \left[\left(\frac{A'B + AB'}{A'^2} \right)_1 E'(ia_1) \right] \right\}. \quad (6.50) \end{aligned}$$

Rovnice (6.50) se od rovnice (6.45) odlišuje dodatečnou logaritmickou singularitou.

3. První pohyb vyvolaný přímým paprskem

Příchod přímé vlny je určen $\xi = \xi_M$ [kapitola IV.B.1 (4.4)]

$$\left(\frac{dt}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_M} = 0 .$$

Tedy rychle se měnící funkcí je pouze $d\xi/dt$ a zbytek integrandu v rovnici (6.29) může být považován za konstantu pro $\xi = \xi_M$.

Pro vyhodnocení $d\xi/dt$ rozvineme t v mocninnou řadu okolo t_M

$$t - t_M = \left(\frac{dt}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_M} (\xi - \xi_M) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2t}{d\xi^2}\right)_{\xi=\xi_M} (\xi - \xi_M)^2 + \dots \quad (6.51)$$

Jelikož $\left(\frac{dt}{d\xi}\right)_{\xi_M} = 0$

$$\xi = \xi_M + [2(t - t_M)(d^2t/d\xi^2)_{\xi_M}^{-1}]^{1/2} \quad (6.52)$$

a

$$d\xi/dt = [2(t - t_M)(d^2t/d\xi^2)_{\xi_M}^{-1}]^{-1/2} . \quad (6.53)$$

Z rovnice (6.43) dostaneme

$$\frac{d^2t}{d\xi^2} = \sum_j \frac{z_j a_j^2}{(\xi^2 + a_j^2)^{3/2}} . \quad (6.54)$$

Proto aproximace rovnice (6.29) prvním pohybem je

$$\begin{aligned} I_z(r, z, t) \cong & \left(\frac{1}{r}\right)^{1/2} \frac{1}{\pi} H(t - t_A) \Im \int_{t_A}^t E_z(\xi_M) \\ & \times (i\xi_M)^{1/2} \left[\frac{d^2t}{d\xi^2}\right]_{\xi_M}^{-1/2} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau} \sqrt{\tau-t_M}} . \end{aligned} \quad (6.55)$$

Pro přímý paprsek je dolní mez integrace t_A nahrazena t_M . Avšak pokud vlna podél přímého paprsku následuje vlnu

podél lomeného paprsku, je dolní mez nahrazena t_d , kde t_d ($< t_M$) je horní mez integrace při aproximaci prvním pohybem lomených vln (probíráno v kapitole VI.C.2). Časově závislá část integrálu v rovnici (6.55) je stejná jako rovnice (6.47). Po ukončení integrace dostaneme

$$I_z(r, z, t) = \left[\frac{|\xi_M|}{r} \right]^{1/2} \left[\sum_j \frac{z_j a_j^2}{(\xi_M^2 + a_j^2)^{3/2}} \right]^{-1/2} \quad (6.56)$$

$$\times \left\{ H(t-t_M) \Re[E_z(\xi_M)] + \frac{1}{\pi} \log \frac{|t-t_M|}{t_d^*} \Im[E_z(\xi_M)] \right\},$$

kde t_d^* je dáno rovnicí (6.49), je-li t_k nahrazeno t_d a t_1 t_M .

Opět existuje logaritmická singularita ve výsledku, jestliže $\Im[E_z(\xi_M)] \neq 0$, což nastane jen tehdy, pokud "kónická vlna" předchází přímou vlnu.

VII. Tranzientní odezvy a numerické příklady

Řešení výchylek pro pulsy putující podél specifických zobecněných paprskových drah jsou dána v rovnici (4.9) pro rovinné přetvoření a v rovnici (5.41) pro osově symetrické odezvy. Tranzientní odezva v \mathbf{x} je potom určena součtem řešení pro pulsy podél všech možných paprskových drah. To může být kompaktně vyjádřeno jako

$$u_{\alpha}(\mathbf{x}, t) = A_{\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ H(t-t_{A_j}) \int_{t_{A_j}}^t f^{(n+1)}(t-\tau) I_{\alpha_j}(\mathbf{x}, \tau) d\tau + f^{(n)}(0) I_{\alpha_j}(\mathbf{x}, t) + f^{(n-1)}(0) \frac{\partial}{\partial t} I_{\alpha_j}(\mathbf{x}, t) \right\} \quad (7.1)$$

Index j přísluší j -tému zobecněnému paprsku.

Pro případy rovinného přetvoření $\alpha=x$ nebo z a z rovnice (4.9) máme

$$I_{x_j} = 2 \Im \int_0^{\xi_1^{(\tau)}} \xi E_x(\xi) d\xi, \quad I_{z_j} = 2 \Re \int_0^{\xi_1^{(\tau)}} E_z(\xi) d\xi. \quad (7.2)$$

Pro případy osové symetrie $\alpha=r$ nebo z a z rovnice (5.37) a (5.47) máme

$$I_{r_j} = \frac{2}{\pi r} \Im \int_0^{\xi_1^{(\tau)}} \xi E_x(\xi) \frac{\partial K_j(\xi; \mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} d\xi, \quad I_{z_j} = \frac{2}{\pi} \Im \int_0^{\xi_1^{(\tau)}} \xi E_x(\xi) \frac{1}{K_j(\xi; \mathbf{x}, \tau)} d\xi. \quad (7.3)$$

Integrace vzhledem k ξ podél komplexní dráhy AMC je znázorněna na obr. 9.

Koeficienty A_{α} a index n závisí na charakteru zdrojových funkcí (tab. I). Pro explozivní zdroj máme $n=1$ a $A_{\alpha}=1/(4\pi c^2)$; pro koncentrovanou sílu uvnitř vrstvy $n=0$ a $A_{\alpha}=1/(4\pi\rho)$; pro koncentrovanou sílu na volném povrchu $n=0$ a $A_{\alpha}=1/(2\pi\mu)$. Je-li $n=0$, $(n-1)$ -derivace časové funkce $f^{(n-1)}(t)$ je nulová.

Poněvadž doba pozorování $(0, t)$ v libovolném daném místě \mathbf{x} je konečná, může být nekonečná horní mez sumace nahrazena

konečným číslem N . Uspořádáme tedy všechny paprsky ve vzestupném pořadí podle časů příchodů. Všechny paprsky s časy příchodů t_j menšími než maximální čas pozorování musí být zahrnuty do sumace. Okamžik t_A , který je dolní mezí integrace v rovnici (7.1), je minimem všech t_{A_j} ($j=1, 2, 3, \dots, N$). Pro prostředí s jednou vrstvou poskytuje maticová formulace paprskových skupin (kapitola V.A.1) systematickou metodu pro třídění všech paprsků. Výpočty t_j jsou probírány v kapitole VII.A.

Poněvadž každý paprskový integrál I_{α_j} má svou vlastní integrační cestu (obr. 6 a 9), musí být vyhodnocen samostatně. Přirozeným přístupem potom je vypočítat nejprve každý $I_{\alpha_j}(\tau)$ v předem určeném čase τ mezi 0 a t a potom sloučit všechny paprsky pro každou hodnotu τ

$$I_{\alpha}(\mathbf{x}, \tau) = \sum_{j=1}^N I_{\alpha_j}(\mathbf{x}, \tau) . \quad (7.4)$$

Máme-li vyhodnocen $I_{\alpha}(\tau)$ pro mnoho diskrétních, ale ekvidistantních hodnot τ , určíme potom $u_{\alpha}(t)$ jednoduchou konvolucí

$$u_{\alpha}(\mathbf{x}, t) = H(t-t_A) \int_{t_A}^t f^{(n+1)}(t-\tau) I_{\alpha}(\mathbf{x}, \tau) d\tau + f^{(n)}(0) I_{\alpha}(\mathbf{x}, t) + f^{(n-1)}(0) \frac{\partial}{\partial t} I_{\alpha}(\mathbf{x}, t) . \quad (7.5)$$

K vyhodnocení integrálů I_{α_j} bylo navrženo mnoho rozličných metod (Cagniard, 1939; Abramowici a Alterman, 1965; Müller, 1968, část II). V kapitole VII.B probíráme numerický algoritmus pro integrování I_{α_j} v komplexní rovině ξ . Numerické výsledky jsou uvedeny v kapitole VII.C pro dva příklady: bodový všesměrový zdroj [$n=1$ v (7.1) a (7.5)] uvnitř desky s přijímačem na povrchu a stejný zdroj ve vrstvě ležící na poloprostoru z jiného materiálu. Tyto výsledky mohou být porovnány s výsledky získanými Knopoffem (1958a) pro desku a Pekerisem a kol. (1965) a Helmbergerem

(1972) pro vrstvu. Numerické výsledky jsou též uvedeny v pracech Garvina (1956) pro všesměrový přímkový zdroj uvnitř poloprostoru, Mooneyho (1976) pro bobovou sílu na povrchu poloprostoru a Schmuelyho (1975) pro přímkové síly na povrchu desky.

A. Doby příchodů zobecněných paprsků

V rovnicích (7.2) a (7.3) je $\xi_1(t)$ pro j -tý paprsek určeno z rovnice (4.3) nebo (5.45)

$$(t)_j = -ir\xi_{1j}(t) + \sum_k z_{kj} \sqrt{\xi_{1j}^2(t) + a_k^2} \quad (7.6)$$

Před výpočtem $\xi_{1j}(t)$ pro danou hodnotu t , musíme vypočítat umístění pevného bodu M z rovnice (4.4)

$$\left(\frac{dt}{d\xi}\right)_j = -ir + \xi_j \sum_k z_{kj} / \sqrt{\xi_j^2 + a_k^2} = 0 \quad (7.7)$$

Jestliže existuje jedna nebo dvě odmocniny ($k=1,2$), může být tato rovnice vyřešena přesně [(4.25)]. Jinak musí být řešena numericky. Stejně ale zjistíme, že i pro případ dvou odmocnin je vhodnější nalézt kořen pomocí Mullerovy metody (Conte a de Boor, 1972); algoritmus pro řešení nelineární rovnice [viz dodatek VII.A]. Stejně jako v kapitole IV je kořen rovnice (7.7) označen $\xi = \xi_M = ia_{Mj}$.

Mullerova metoda dosahuje téměř kvadratické konvergence a konvergence je rychlá, pokud počáteční odhady leží blízko hledaného kořenu nelineární rovnice. ξ_{Mj} je vždy na kladné imaginární ose ξ a leží pod minimální hodnotou a_k ($k=1,2,\dots$), jestliže $z_{kj} \neq 0$ v rovnici (7.6). Počáteční odhad ξ_{Mj} se volí v minimu ia_k a dále se pokračuje směrem dolů po imaginární ose po velkých intervalech dokud se neobjeví změna znaménka hodnoty $dt/d\xi$. Velký interval ohraničující kořen je postupně půlen tak, aby jeho dva krajní body obsahovaly hodnoty ξ , ve kterých má $dt/d\xi$ opačná

znaménka. Po několika iteracích tohoto algoritmu (metoda půlení kroku) jsou konečné dvě hodnoty ξ použity jako počáteční hodnoty pro Mullerův algoritmus. Algoritmus půlení kroku je nutný pro vytvoření dostatečně malého omezujícího intervalu. Jinak singularita v $\xi = \min(ia_k)$ v rovnici (7.7) zapříčiní totální neúčinnost Mullerovy metody. S vhodně vybranými počátečními hodnotami pro Mullerovu metodu je přesná hodnota kořenu nalezena během několika iterací.

Po nalezení ξ_M použijeme pro stanovení t_{M_j} rovnici (7.6) při $\xi_{1_j}(t) = \xi_{M_j}$. t_{M_j} je doba příchodu j -tého paprsku podél přímé paprskové dráhy (kapitola IV.B.1). Pro přímé paprsky $t_j = t_{M_j}$ v rovnici (7.1).

ξ_{M_j} je potom porovnáno s bodem rozvětvení ia_f odpovídajícím kónickým vlnám (kapitola IV.B.2 a IV.B.2.C). Jestliže $|\xi_{M_j}| > |ia_f|$, musíme potom vypočítat t_f v rovnici (4.16), neboť vlny postupující podél lomené paprskové dráhy přicházejí dříve než vlny podél přímé paprskové dráhy. Doba příchodu t_f pro lomený paprsek je vypočítána substitucí $\xi_{1_j} = ia_f$ v rovnici (7.6). Pro lomené paprsky $t_j = t_{f_j}$ v (7.1).

Hodnoty $\xi_{1_j}(t)$ v rovnici (7.6) pro $t > t_j$ jsou též vypočítány Mullerovou metodou. Při tomto výpočtu nejsou počáteční hodnoty tak kritické, takže jako první horní mez $\xi_{1_j}(t_1)$ se používá ξ_{M_j} nebo ia_f . Pro kónické vlny jsou hodnoty $\xi_{1_j}(t)$ ryze imaginární mezi ia_f a ξ_{M_j} , pro příchod přímých paprsků jsou komplexní v prvním kvadrantu (obr.9).

Jako příklad ukážeme v tabulce VI minimální časy příchodů ($\tau = C_1 t / h_1$) pro prvních 20 zobecněných paprsků třívrstvého prostředí na obr.2. Data vrstev jsou následující

$h_1 = 1.0$	$h_2 = 2.0$	$z_0 = 2.0$
$c_1 = \sqrt{3}$	$C_1 = 1.0$	$\rho_1 = 1.21$

Tabulka VI Minimální časy příchodů pro prvních dvacet paprsků pro tři místa pozorování

A ($r = 2$)		B ($r = 5$)		C ($r = 10$)	
1.55701	PP_1	2.94842	PP_1	4.50222	$pP_3^*P_2P_1$
2.06418	PS_1	3.19006	$pP_3^*P_2P_1$	4.95291	$pP_3^*P_2S_1$
2.40544	pP_2P_1	3.44053	pP_2P_1	5.33390	$pP_3^*S_2P_1$
2.52276	PP_1^3	3.53448	PS_1	5.41131	$PP_3^*P_2^2P_1$
2.85345	pP_2S_1	3.60766	PP_1^3	5.52239	PP_1
2.97381	$PP_1^2S_1$	3.64075	$pP_3^*P_2S_1$	5.53073	$pP_3^*P_2^3P_1$
3.23445	$pP_3^*S_2P_1$	3.95660	pP_2S_1	5.68873	$pS_3^*P_2P_1$
3.24029	pS_2P_1	4.02174	$pP_3^*S_2P_1$	5.77082	pP_2P_1
3.37462	$PP_2^2P_1$	4.09915	$PP_3^*P_2^2P_1$	5.78459	$pP_3^*S_2S_1$
3.43210	$PP_1S_1^2$	4.13848	$PP_1^2S_1$	5.86200	$PP_3^*P_2^2S_1$
3.48507	$pP_2P_1^3$	4.16589	$PP_2^2P_1$	5.98143	$pP_3^*P_2P_1^2S_1$
3.59590	PP_1^5	4.21857	$pP_3^*P_2P_1^3$	6.03601	PP_1^3
3.68514	$pP_3^*S_2S_1$	4.30090	$pP_2P_1^3$	6.12771	PS_1
3.70653	pS_2S_1	4.43889	PP_1^5	6.21359	$PS_3^*P_2^2P_1$
3.80884	$PP_2^2S_1$	4.46573	$pS_3^*S_2P_1$	6.21362	$PP_2^2P_1$
3.90139	PS_1^3	4.47243	$pP_3^*S_2S_1$	6.22347	$pS_3^*P_2S_1$
3.92009	$pP_2P_1^2S_1$	4.47724	pS_2P_1	6.24299	$PP_3^*P_2S_2P_1$
4.03184	$PP_1^4S_1$	4.54984	$PP_3^*P_2^2S_1$	6.32040	$pP_3^*P_2^3P_1$
4.17117	$Pp_2S_2P_1$	4.64287	$PP_2^2S_1$	6.34492	pP_2S_1
4.28375	$pS_2P_1^3$	4.66927	$pP_3^*P_2P_1^2S_1$	6.36242	$pP_3^*S_2P_1^3$

$$\begin{array}{lll}
c_2 = 1.1c_1 & C_2 = 1.1C_1 & \rho_2 = 2.00 \\
c_3 = 2.2c_1 & C_3 = 2.2C_1 & \rho_3 = 3.00
\end{array}$$

Existují tři místa pozorování A, B a C na povrchu, pro něž platí

$$r_A = 2.0 \quad r_B = 5.0 \quad r_C = 10.0 .$$

Každý paprsek v tabulce je označen módem každého úseku (P nebo S) a vrstvou (index 1, 2 nebo 3). První úsek ze všesměrového zdroje ve vrstvě 2 je buď dolů směřující p-mód nebo nahoru směřující P-mód, kde je vynechán index 2. Podle obr. 8a existovaly dva paprsky pro dvouúsekovou dráhu, PP_1 a PS_1 ; a čtyři paprsky pro tříúsekovou dráhu, pP_2P_1 , pP_2S_1 , pS_2P_1 , pS_2S_1 . V obr. 8b a 8c mohlo existovat osm paprsků pro tříúsekovou lomenou dráhu, $pP_3^*P_2P_1, \dots, pS_3^*S_2S_1$.

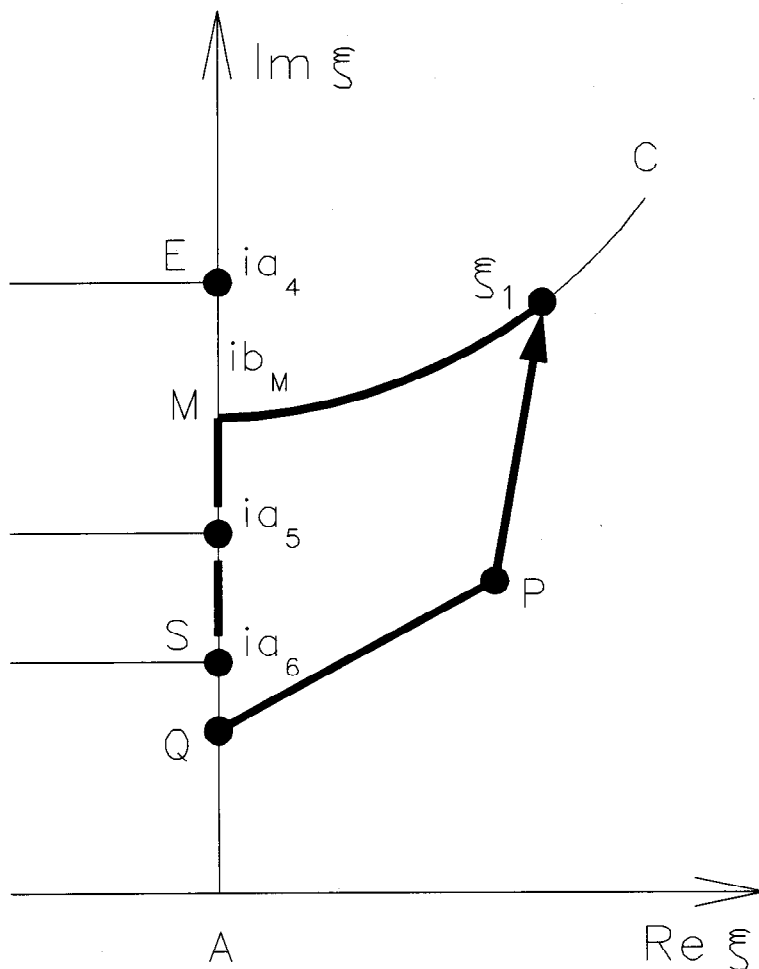
Avšak poznamenejme, že v místě A PP_1^3 -paprsek, nahoru jdoucí P-mód a potom 3 úseky v P-módu ve vrstvě 1) přichází dříve než mnoho tříúsekových paprsků a existují pouze dva z osmi třísegmentových lomených paprsků. Se vzrůstajícím r se objevuje více lomených paprsků. V místě B existuje pět lomených třísegmentových paprsků. V místě C existuje všech osm třísegmentových paprsků, ale pouze šest je jich uvedeno v tabulce. Poznamenejme dále, že v místě C, jelikož je rychlost P-vlny vyšší, je paprsek PP_1^3 rychlejší než PS_1 a paprsek $PP_2^2P_1$ je rychlejší než paprsek pP_2S_1 .

B. Numerický výpočet komplexních integrálů

1. Integrace v komplexní rovině

Integrační cesta integrálů v rovnicích (7.2) a (7.3) je znázorněna na obr. 9 podél křivky $AM\xi_1$. Nejsložitější případ (případ $C-t > t_M$) je zopakován v obr. 15 a integrace začíná z bodu S ($\xi_S = ia_6$ a $a_6 < a_5 < b_M$). Poněvadž je integrand vpravo od této cesty analytický, můžeme nahradit cestu $SM\xi_1$ cestou $QP\xi_1$, jak je znázorněno v obr. 15. Bodem Q může být libovolný

bod mezi A a S a P je "otočný" bod ("pivot point") umístěný kdekoliv v komplexní rovině ξ . Na začátku zvolíme $\xi_0 = 0.8\xi_s$ a $\xi_p = \xi_s + 0.2|\xi_s|$. Hodnoty ξ_p budou během výpočtu měněny tak, aby délky úseků QP a P ξ_1 byly přibližně stejné.



Obr.15 Změna integrační cesty $SM\xi_1$ na $QP\xi_1$

Existuje několik důvodů pro určení nové cesty $QP\xi_1$. Za prvé leží celá v prvním kvadrantu, čímž se vyhýbá bodům rozvětvení (ia_6, ia_5 atd.), pevnému bodu (ib_M) a ostatním pólům integrandu podél imaginární osy (Rayleighův pól, Stoneleyovo póly, atd.). Tyto singulární body způsobují při numerické integraci velké obtíže. Za druhé podél těchto přímých cest mohou být využity standardní numerické metody integrace jako Gaussova kvadratura [viz dodatek VII.B].

Za třetí, jelikož se úsek QP mění pouze příležitostně, je časově závislá část integrandu, $S(\xi)\Pi(\xi)D(\xi)$, podél QP vypočtena pouze jednou pro široký rozsah t .

K numerickému vyhodnocení těchto integrálů je použita Gaussova kvadratura. Komplexní interval (Q,P) je zobrazen do reálného intervalu $(-1,1)$ změnou integrační proměnné a je použita 10-ti bodová Gaussova formule [viz dodatek VII.B].

Integrace v intervalu (P,ξ_1) pro rovnici (7.2) může být provedena analogicky. Avšak pro rovnici (7.3) to nejde provést bez rozmyslu, neboť funkce $K_j(\xi_j; \mathbf{x}, t)$ je pro $\xi=\xi_1(t)$ nulová. Toto je integrální singularita polovičního řádu, která vyžaduje speciální numerický postup.

Předně je změněna integrační proměnná z ξ na u

$$u = \sqrt{\xi^2 - \xi_1^2} \quad (7.8)$$

a

$$du = \xi d\xi / \sqrt{\xi^2 - \xi_1^2} \quad (7.9)$$

Změnou proměnné se zavede činitel $[\xi(u)^2 - \xi_1^2]^{1/2}$ do čitatele, který zruší singularitu polovičního řádu K ve jmenovateli. Potom se provede rozvoj v mocninnou řadu okolo $u=0$ z důvodu analytického odstranění společného faktoru a usnadnění numerického výpočtu integrandu pro u blízko nuly. Komplexní integrační interval pro u $(0, (\xi_p^2 - \xi_1^2)^{1/2})$ může být zobrazen do reálného intervalu $(-1,1)$ a může být využita desetibodová Gaussova integrační formule. Poznamenejme, že Gaussova kvadratura používá otevřený interval, nevyžaduje tedy vyhodnocování integrandu v koncových bodech.

Integrace rovnice (7.3) může být tedy provedena pro každé τ . Výsledky pro j -tý zobecněný paprsek jsou přidány k výsledkům ostatních přispívajících paprsků, což vede k získání $I_\alpha(\tau)$ [(7.4)].

2. Konvoluční integrace

K dokončení řešení musí být provedena konvoluce I_α (vypočtené v časovém intervalu $d\tau$) s časovou funkcí zdroje.

Vzorec pro tuto konvoluci je dán rovnicí (7.5).

Poněvadž data pro I_α jsou přichystána v pevném intervalu dt , je integrál v (7.5) vyhodnocen pomocí Simpsonova vzorce. Jestliže meze integrace neodpovídají časovým hodnotám, ve kterých bylo spočteno I_α , je pro aproximaci I_α použita kubická interpolace. Navíc kubická interpolace je též použita právě před a po příchodu strmého vlnového čela z důvodu minimalizování numerických chyb spojených s takovými vlnovými čely.

Zdrojová funkce použitá u příkladů v kapitole VII.C je parabolická skoková funkce. Je složena z několika kvadratických časových funkcí $f_2(t)=(t^2/2)H(t)$ podle diferencí druhého řádu. Superponovaný výsledek je (Pekeris a kol., 1965)

$$\begin{aligned} f(t) &= f_2(t) - 2f_2(t-\Delta) + f_2(t-2\Delta) \\ &= 0, & t < 0 \\ &= 1/2 t^2, & 0 < t < \Delta \\ &= 1/2 t^2 - (t-\Delta)^2, & \Delta < t < 2\Delta \\ &= 1/2 t^2 - (t-\Delta)^2 + 1/2 (t-2\Delta)^2 = \Delta^2, & 2\Delta < t. \end{aligned} \quad (7.10)$$

2Δ je doba náběhu parabolické skokové funkce.

Pro tuto zdrojovou funkci $f(0)=0$ a $f'(0)=0$; k výsledku přispívá pouze integrál v rovnici (7.5).

Poněvadž $f''(t)$ je po úsecích spojitá, jsou pro výpočet této funkce použity speciální váhovací a interpolační rutiny. Za prvé integrál

$$\hat{I}_\alpha(\mathbf{x}, t) = H(t-t_A) \int_{t_A}^t I_\alpha(\mathbf{x}, \tau) d\tau \quad (7.11)$$

je vypočten v časovém intervalu $2dt$ Simpsonovým vzorcem. u_α je potom vypočteno váhovacím algoritmem

$$u_\alpha(\mathbf{x}, t) = \hat{I}_\alpha(\mathbf{x}, t) - 2\hat{I}_\alpha(\mathbf{x}, t-\Delta) + \hat{I}_\alpha(\mathbf{x}, t-2\Delta). \quad (7.12)$$

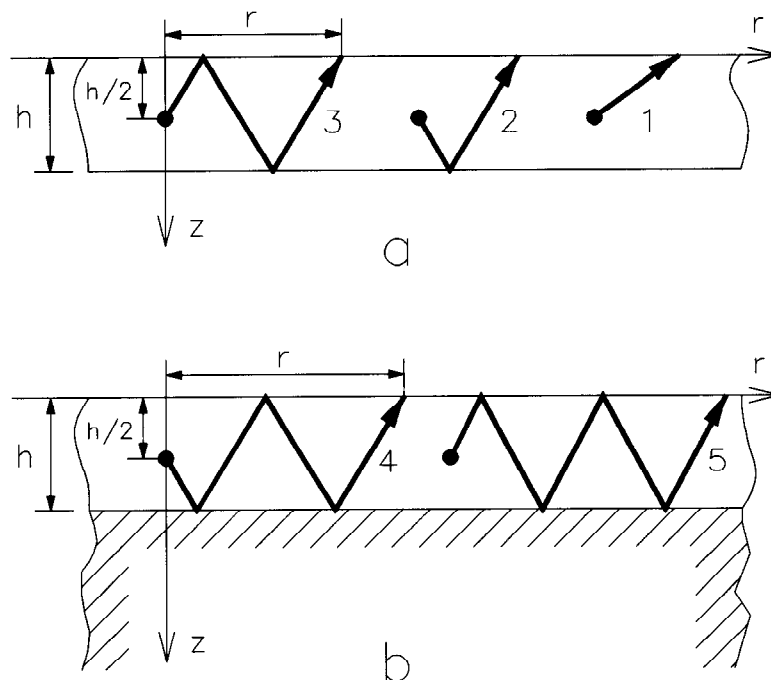
Kubická interpolace je použita, pokud doba náběhu 2Δ není sudým celočíselným násobkem datového intervalu $2dt$.

C. Tranzientní odezvy pro desku a vrstevnaté pevné těleso

Numerické výpočty byly dělány pro desku a jednovrstvé pevné těleso (viz obr.16). Materiálové konstanty v obou případech jsou stejné

$$\begin{array}{llll} \lambda_1 = \mu_1, & \rho_1 = 1.21, & C_1 = 1.0, & c_1 = \sqrt{3}C_1, \\ \lambda_2 = 2\mu_1, & \rho_2 = 2.0, & C_2 = 1.1, & c_2 = \sqrt{3}C_2, \end{array}$$

Minimální časy příchodů ($\tau=C_1t/h$) podél různých cest pro přijímač na povrchu ($r=5h$) v desce jsou v tabulce VII. Výsledky jsou prezentovány po skupinách (obr.16) a každá skupina obsahuje paprsky mající stejný počet segmentů. Paprsky jsou označeny počtem P- nebo S-módů. Tedy P^4 představuje čtyři P-segmenty, první segment míří dolů; P^3S představuje tři P-segmenty a jeden S-segment a zahrnuje následující tři kombinace: pPpS, pPsP a pSpP. Podobně P^2S^2 představuje také tři paprsky: pPsS, pSpS a pSsP. Všechny paprsky ve skupině 7 nebo vyšší s dobami příchodů většími než 6.5 nejsou v tabulce uvedeny.



Obr. 16 Pět paprskových skupin :
 a) v desce;
 b) ve vrstvě na poloprostoru.

Tabulka VII Minimální doby příchodů pro paprsky v desce
a vrstvě ($r=5h$)

Skupina	Přímý paprsek (deska a vrstva)		Lomený paprsek (vrstva)	
1	2.90115	P		
2	3.01386	P^2	2.98510	pP^*P
	3.71999	pS	3.59577	pP^*S
3	3.22749	(1) P^3		
	3.84928	(2) P^2S	3.83629	PpP^*S
	4.53972	(1) PS^2	4.44695	PsP^*S
4	3.52373	(1) P^4		
	4.08783	(3) P^3S		
	4.69028	(3) P^2S^2	4.68748	pP^*PS^2
	5.36093	(1) pS^3	5.29814	pP^*S^3
5	3.88373	(1) P^5		
	4.40939	(4) P^4S		
	4.95709	(6) P^3S^2		
	5.53885	(4) P^2S^3		
	6.18482	(1) PS^4	6.14933	PP^*S^4
6	4.29146	(1) P^6		
	4.79129	(5) P^5S		
	5.30453	(10) P^4S^2		
	5.83647	(10) P^3S^3		
	6.39727	(5) P^2S^4		
	7.01386	(1) pS^5	7.00051	pP^*S^5
7	4.73462	(1) P^7		
	5.21668	(6) P^6S		
	5.70737	(15) P^5S^2		
	6.20931	(20) P^4S^3		
8	5.20417	P^8		
	5.67366	P^7S		
	6.14900	P^6S^2		
9	5.69356	P^9		
	6.15395	P^8S		
10	6.19812	P^{10}		

Pro vrstvu na poloprostoru jsou přímé paprsky stejné jako přímé paprsky v desce (tab.VII). Avšak dolní prostředí má vyšší fázové rychlosti a paprsky mohou být lomeny podél rozhraní. Tato možnost je přezkoumána v každé skupině a dodatečné lomené paprsky jsou též uvedeny v tabulce VII.

Zdrojem je v obou příkladech bodový zdroj, jehož zdrojová funkce je definovaná rovnicí (2.32) a časová funkce $f(t)$ je určena rovnicí (7.10). Podle rovnice (5.59) je potenciál pro vlnové pole vyvolané tímto bodovým zdrojem v neohraničeném prostředí

$$\phi(r, z, t) = \frac{1}{4\pi c_1^2 R} \frac{q}{\Delta^2} \left[f_2(t) - 2f_2(t-\Delta) + f_2(t-2\Delta) \right], \quad (7.13)$$

kde

$$f_2(t) = \frac{1}{2} \left(t - \frac{R}{c_1} \right) H \left(t - \frac{R}{c_1} \right). \quad (7.14)$$

Do řešení pro ϕ jsme vložili faktor q/Δ^2 , kde q je nespecifikovaný koeficient, který závisí na velikosti bodového zdroje, a faktor Δ^{-2} činí časovou funkci bezrozměrnou.

Vyjdeme-li z rovnice (7.13), radiální výchylka u_R v rovnici (5.60) dosahuje špičkové hodnoty při $t=R/c_1+\Delta$ a zůstává konstantní po $t=R/c_1+2\Delta$,

$$\begin{aligned} u_R &= 0, & t < R/c_1, \\ &= \frac{-q}{4\pi c_1^2} \left(\frac{1}{2R^2} + \frac{1}{c_1 R \Delta} \right), & t = R/c_1 + \Delta, \\ &= \frac{-q}{4\pi c_1^2} \frac{1}{R^2}, & t \geq R/c_1 + 2\Delta. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Podle Pekerise a kol. (1965) nastavíme

$$q = (-4\pi c_1^2 \Delta) Q. \quad (7.16)$$

Skalární faktor Q , který zajišťuje výhodnou bezrozměrnost, bude roven jedné ve všech numerických výpočtech. Tedy

špičková hodnota pro u_R při velkém R je přibližně $1/c_1 R$, což nezávisí na Δ .

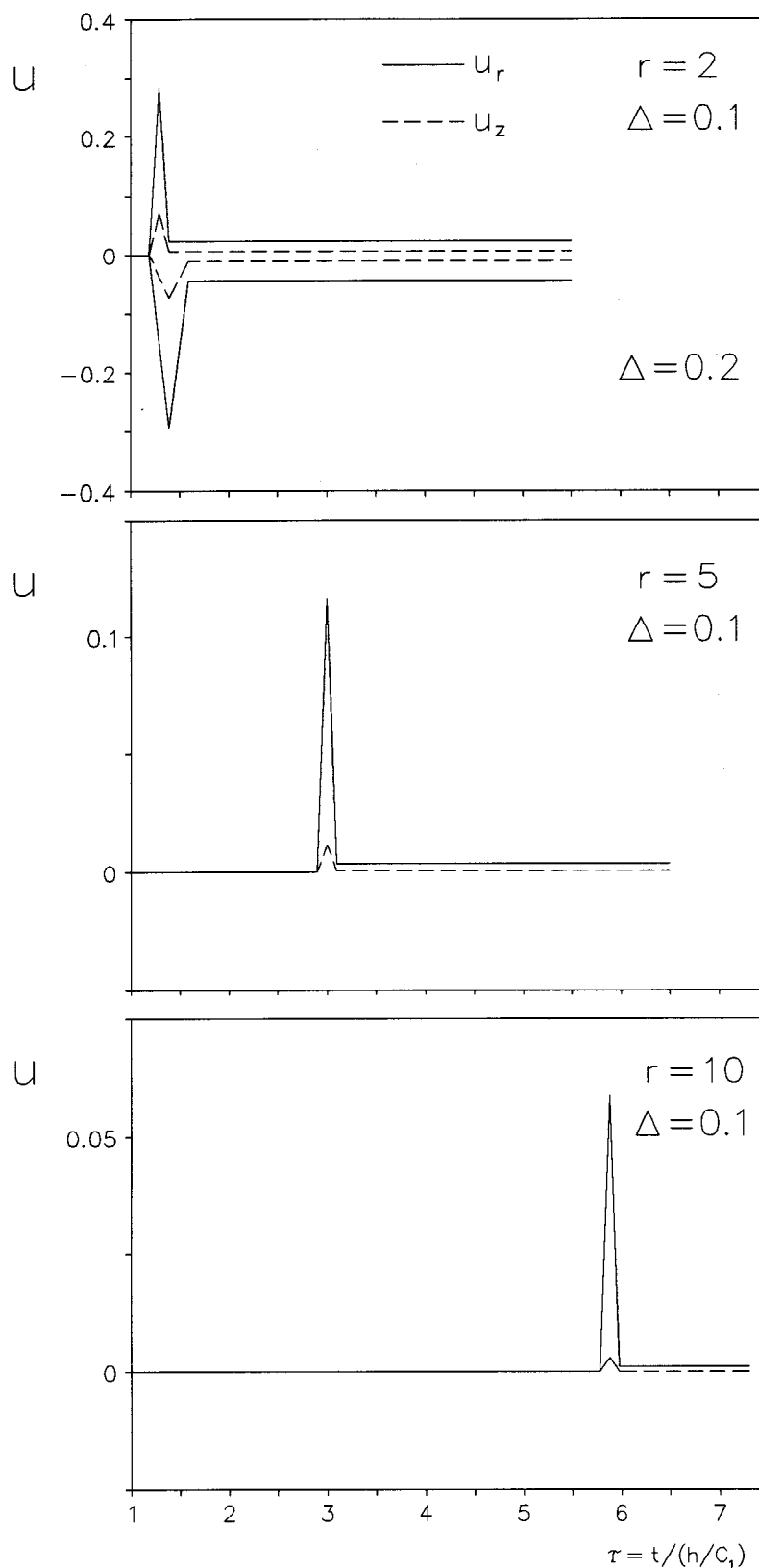
Průběhy pro $u_r = ru_R/R$ a $u_z = zu_R/R$ jsou znázorněny na obr.17 pro tři hodnoty r ($r=2h, 5h, 10h$) a $z=h/2$. Poloviční doba náběhu $\Delta=0.1h/c_1$. Z důvodu porovnání jsou do obrázku zakresleny též výchylky v $r=2h$ pro $\Delta=0.2h/c_1$ v záporné amplitudě.

Jestliže je pozorovací bod uvnitř prostředí, budou výsledky znázorněné na obr.17 představovat řešení vyvolané zdrojovým paprskem. Při pozorování na povrchu je tento paprsek zkombinován s dvěma odraženými paprsky (viz povrchová přijímací funkce - tab.II).

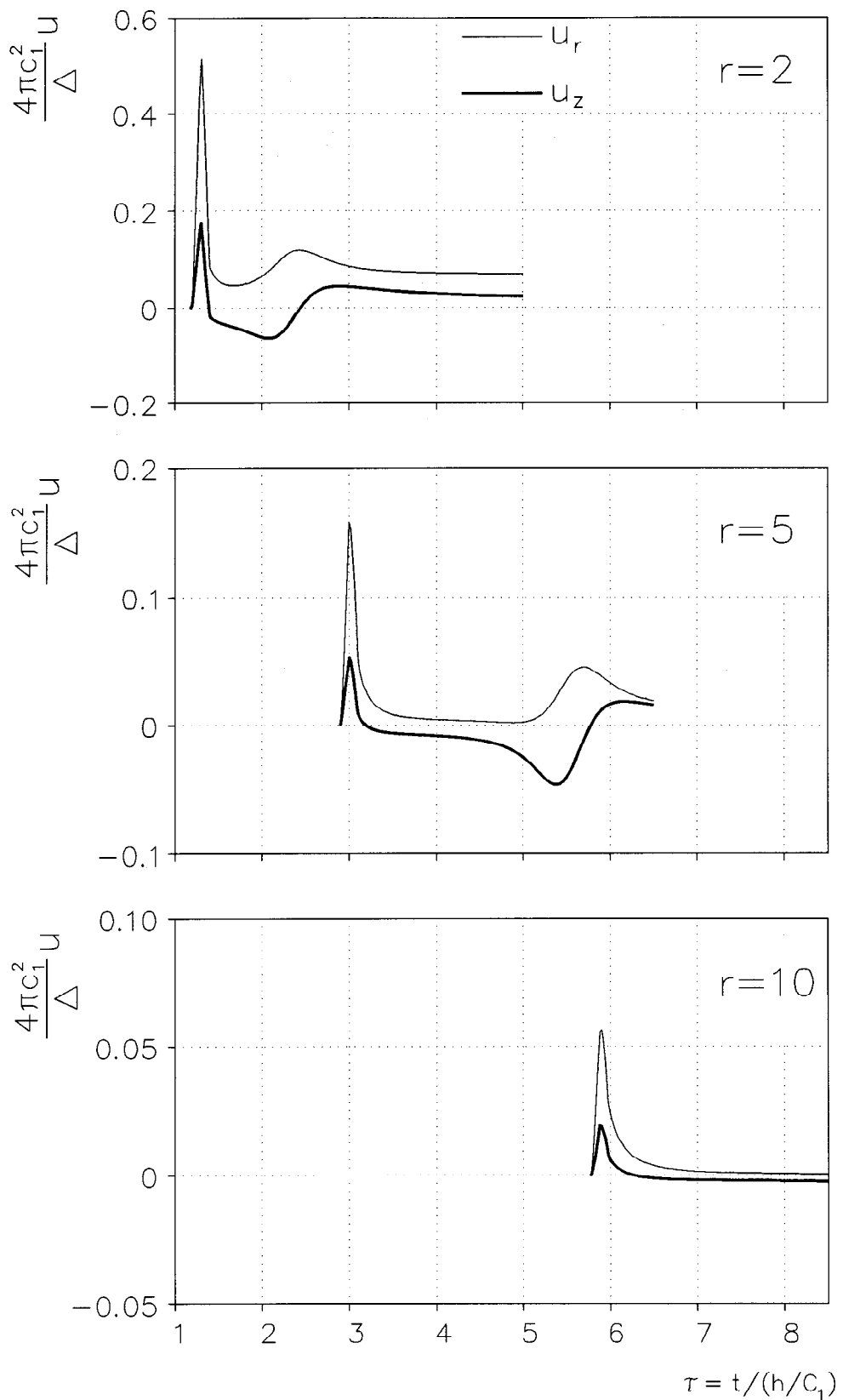
1. Výchylky na povrchu desky

Výchylky vyvolané různými paprskovými skupinami jsou znázorněny na obr.18-21. Používáme stejnou zdrojovou funkci (7.16) s $Q=1$. Stejně jako v obr.17 jsou výchylky u bezrozměrné. Normovaný čas $\tau=t/t_0$, kde $t_0=h/c_1$, je čas, který potřebuje S-vlna k průchodu napříč deskou. Poloviční doba trvání zdrojového pulsu Δ je též normována k t_0 .

První skupina (obr.18) reprezentuje vlny z bodového zdroje působící na horní volný povrch. Toto řešení zcela opomíjí existenci dolního volného povrchu a představuje tedy řešení nekonečného poloprostoru (nekonečného ve směru $+z$). Tyto výsledky pro poloprostor zahrnují zdrojový paprsek a rovněž P- a S-vlny odražené od horního volného povrchu k přijímači umístěnému v nekonečné vzdálenosti pod tímto povrchem. Všimněte si měřítek na vertikálních osách a časových zpoždění (Rayleighova povrchová vlna). Řešení zobecněných paprsků zahrnuje příspěvek Rayleighovy vlny v každém paprsku. Je-li $z \approx 0$, prochází Cagniardova cesta $M\xi_1$ (obr.6) téměř Rayleighovým pólem na imaginární ose, který má dominantní vliv na povrchové výchylky.



Obr.17 Výhylky v $z=0$ vyvolané bodovým zdrojem (střed dilatace) v $z_0=0.5$; $r=0$.



Obr. 18 Výhylky na povrchu poloprostoru vyvolané bodovým zdrojem (střed dilatace) v $z_0=0.5$; $\Delta=0.1$.

Následující graf (obr.19a) znázorňuje výsledky po přičtení druhé paprskové skupiny. Druhá skupina představuje semisférickou P-vlnu putující dolů od zdroje a působící na dolní povrch, od kterého se odráží nahoru (P- a S-vlny). [V tomto deskovém problému nejsou žádné "kónické vlny"]. Tento paprsek zahrnuje dodatečné odrazy dolů směřujících P- a S-vln od horního povrchu (vliv povrchového přijímače).

Řešení znázorněné na obr.19a nemá odpovídající fyzikální analogii tak jako první skupina. Řešení je platné pouze před příchody třetí skupiny, označeno šipkou pro $\tau=3.228$. Řešení však znázorňuje příspěvky jednotlivých paprsků. Paprsek pP přicházející hned po zdrojovém paprsku mění amplitudu nepatrně, ale paprsek pS pro $\tau=3.720$ vyvolává velký rozruch. Poznamenejme také, že příspěvky Rayleighova pólu těchto paprsků změnila pozdější část odezvy.

Obr.19b znázorňuje přičtení třetí skupiny. Významné příchody vln jsou P^2S v 3.849 a PS^2 v 4.540. Toto řešení je platné až do $\tau=3.524$ (P^4 -paprsek).

V další paprskové skupině (obr.19c) je důležitým paprskem P^2S^2 přicházející v 4.690. Tento paprsek je dobrým příkladem vícenásobně přicházejícího paprsku neboli degenerovaného paprsku (Dainty a Dampney, 1972). Všechny paprsky v této skupině začínají úsekem p a existují tři možné permutace zbývajících úseků (jeden P a dva S): pPsS, pSpS a pSsP. Všechny přichází v jediném okamžiku a musí být zahrnuty do řešení. Počítačový program počítá výsledky těchto paprsků současně; využívá stejnou Cagniardovu cestu, ale pro různé koeficienty odrazu a přijímací funkce. Řešení znázorněné v tomto grafu je platné až do $\tau=3.884$ (paprsek P^5).

Vliv páté skupiny je znázorněn na obr.19d; platné do $\tau=4.292$ (paprsek P^6); a šesté skupiny na obr.19e; platné do $\tau=4.735$ (paprsek P^7). Poznamenejme, že navzdory zvětšujícímu se počtu odrazů přispívá každá skupina významnými vlnovými příchody v pozdějších časech.

Celkové řešení pro desku až do $\tau=6.5$ je znázorněno

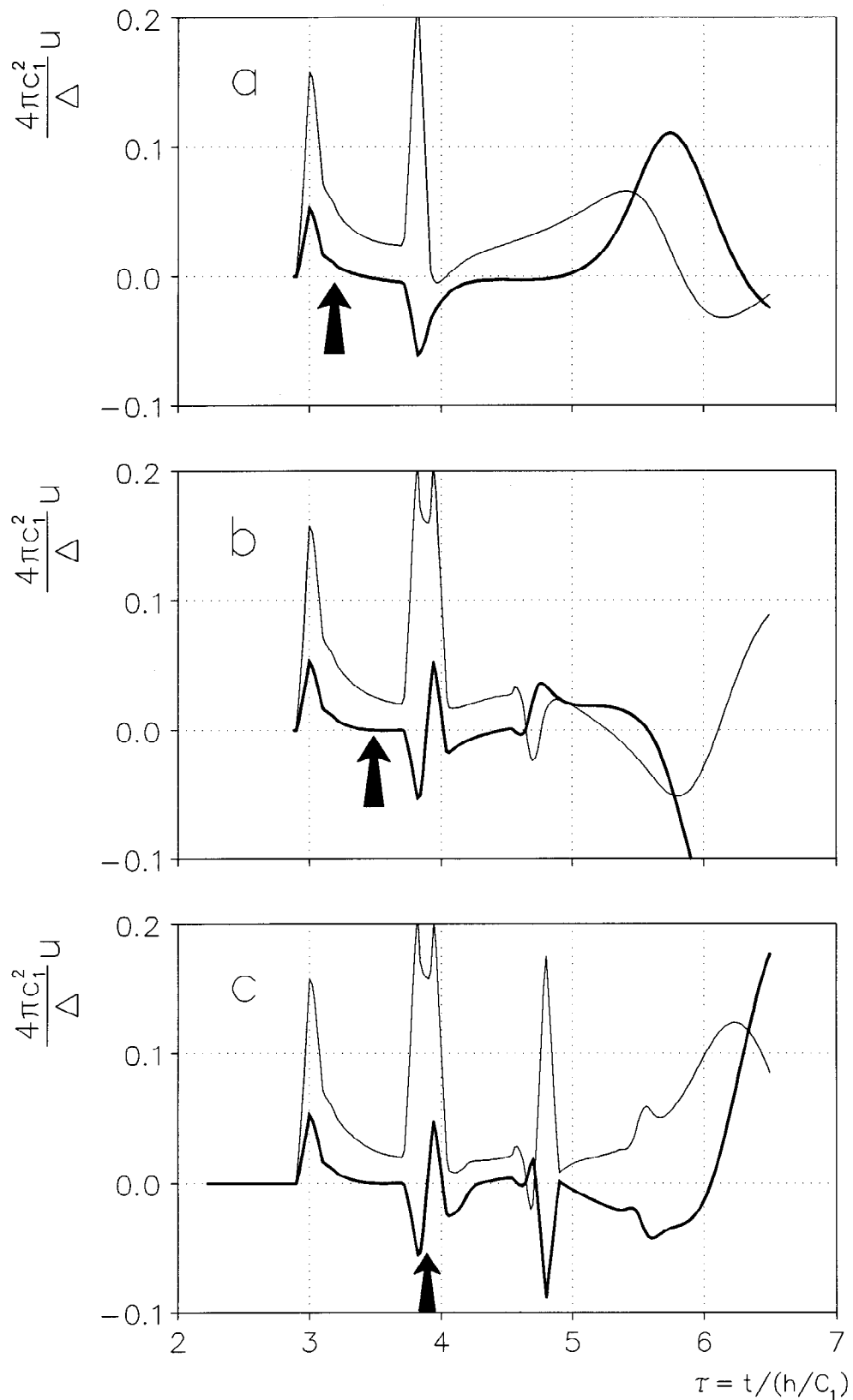
na obr.19f. Jeho pozdější časová odezva se liší od předchozích grafů. Celkové řešení pro desku reprezentuje 30 zřetelných vlnových příchodů s 98 různými paprskovými výpočty, poněvadž to zahrnuje mnoho současných paprskových příchodů. Za zmínku stojí, že vlivy Rayleighovy povrchové vlny, tak rozhodující v prvních pěti skupinách, se nyní zdánlivě nevyskytují kvůli silným paprskům v pozdějších časech.

Abychom vyzkoušeli vlivy jiných vstupních parametrů na odezvu desky, ukážeme na obr.20 výsledky, když se zvětšuje doba trvání pulsu Δ od 0.2 do 0.6, zbývající parametry jsou stejné jako v obr.19. Je vidět, že delší trvání [(7.13) a (7.16)] zvětšuje nepatrně výchylky a rozkládá rozruch na delší časové období.

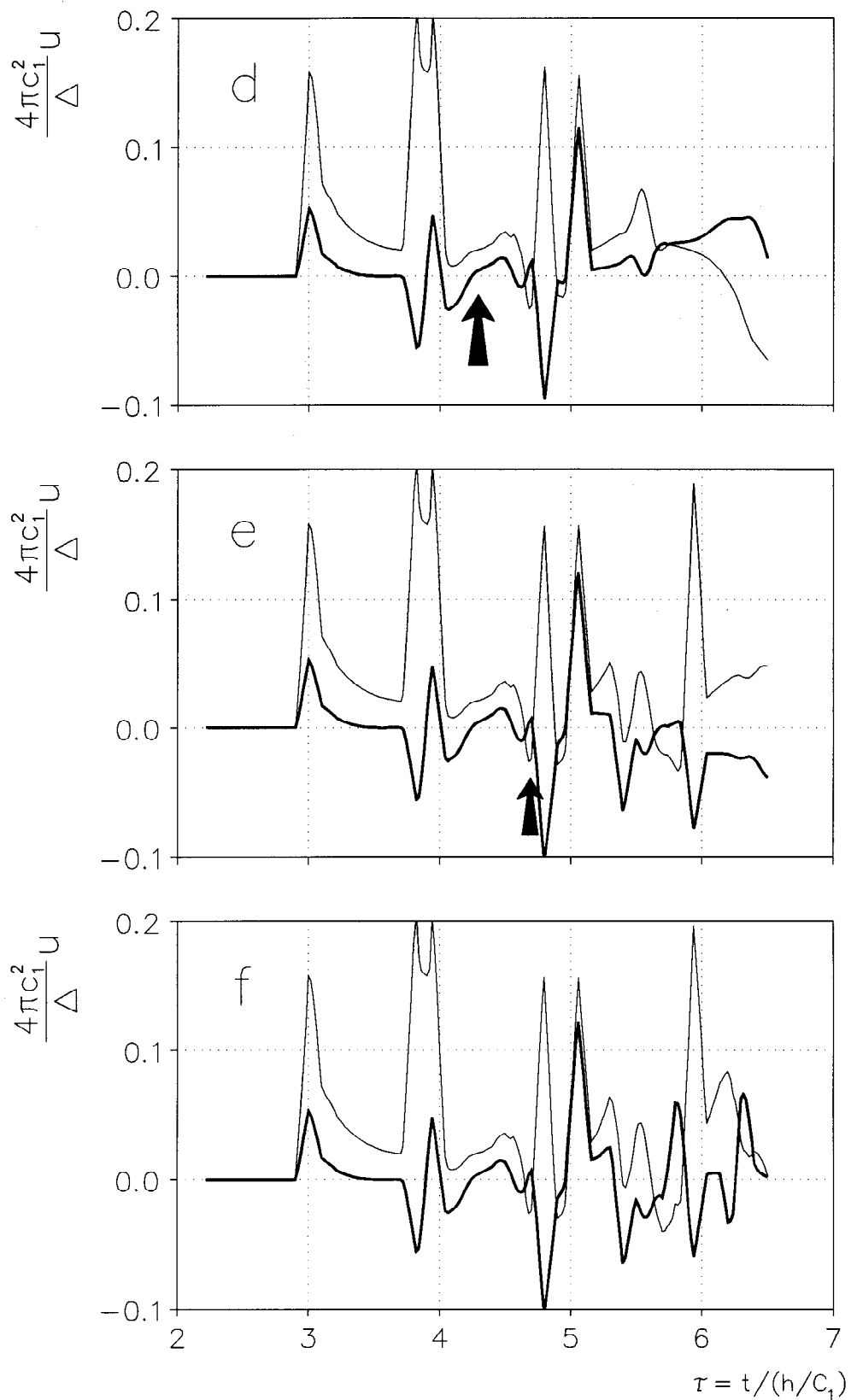
Obr.21 znázorňuje vliv vzdálenosti přijímače. Časy příchodů pro $r=2h$, $5h$ i $r=10h$ jsou uvedeny v tabulce VIII pro první čtyři skupiny. Při všech vzdálenostech vyvolávají paprsky s konverzí módu (PS, P^2S , PS^2 , P^3S a P^2S^2) značný příspěvek k celkové odezvě.

Tabulka VIII Doby příchodů τ do povrchového bodu na desce

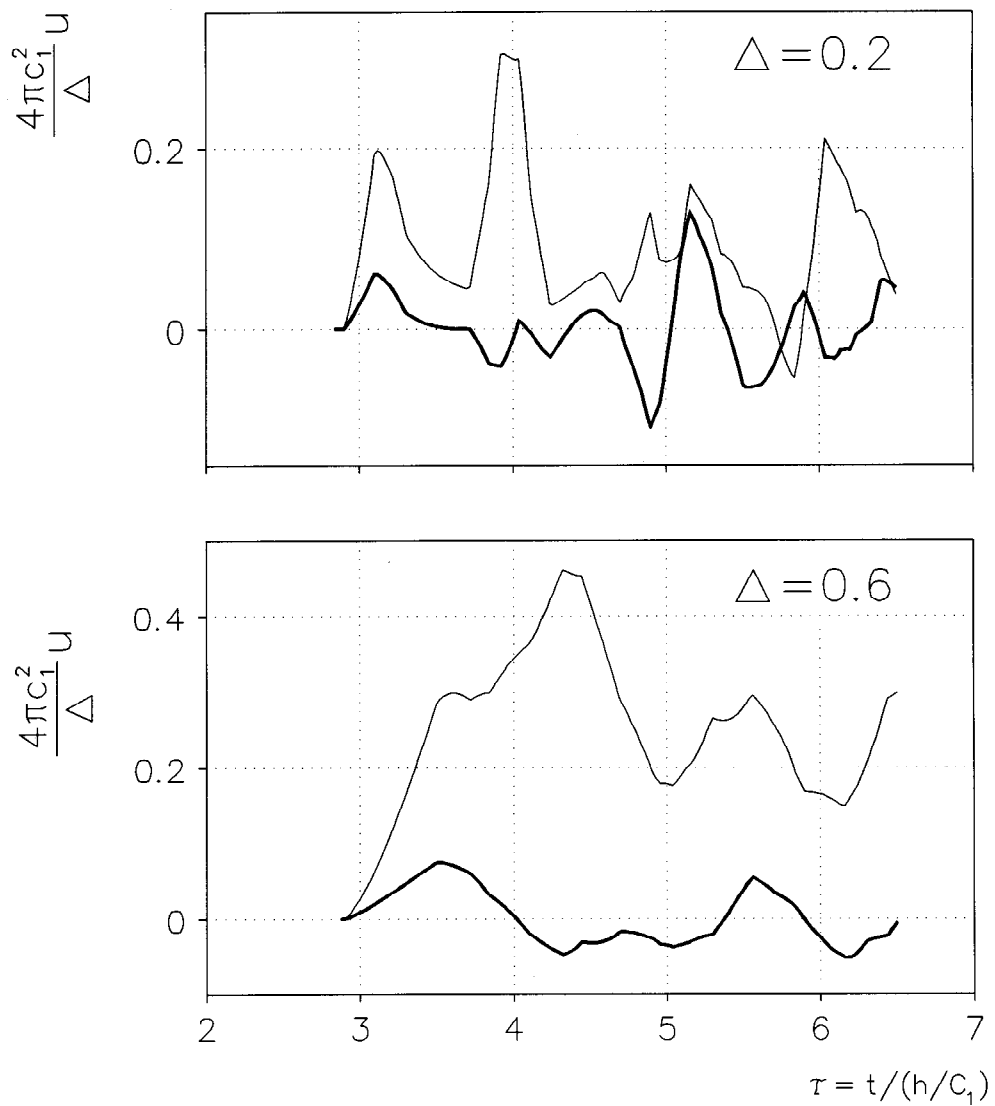
Paprsky	τ		
	$2h$	$5h$	$10h$
P	1.19024	2.90115	5.78072
P^2	1.44338	3.01386	5.83809
PS	2.02384	3.71999	6.59776
P^3	1.84842	3.22749	5.95119
P^2S	2.34190	3.84928	6.65939
PS^2	2.87641	4.53972	7.41489
P^4	2.32737	3.52373	6.11692
P^3S	2.78881	4.08783	6.78041
P^2S^2	3.26302	4.69028	7.48144
PS^3	3.76113	5.36093	8.23214



Obr. 19 Výchylky na povrchu desky vyvolané bodovým zdrojem ($r=5; \Delta=0.1$):
a) dvě; b) tři; c) čtyři paprskové skupiny;

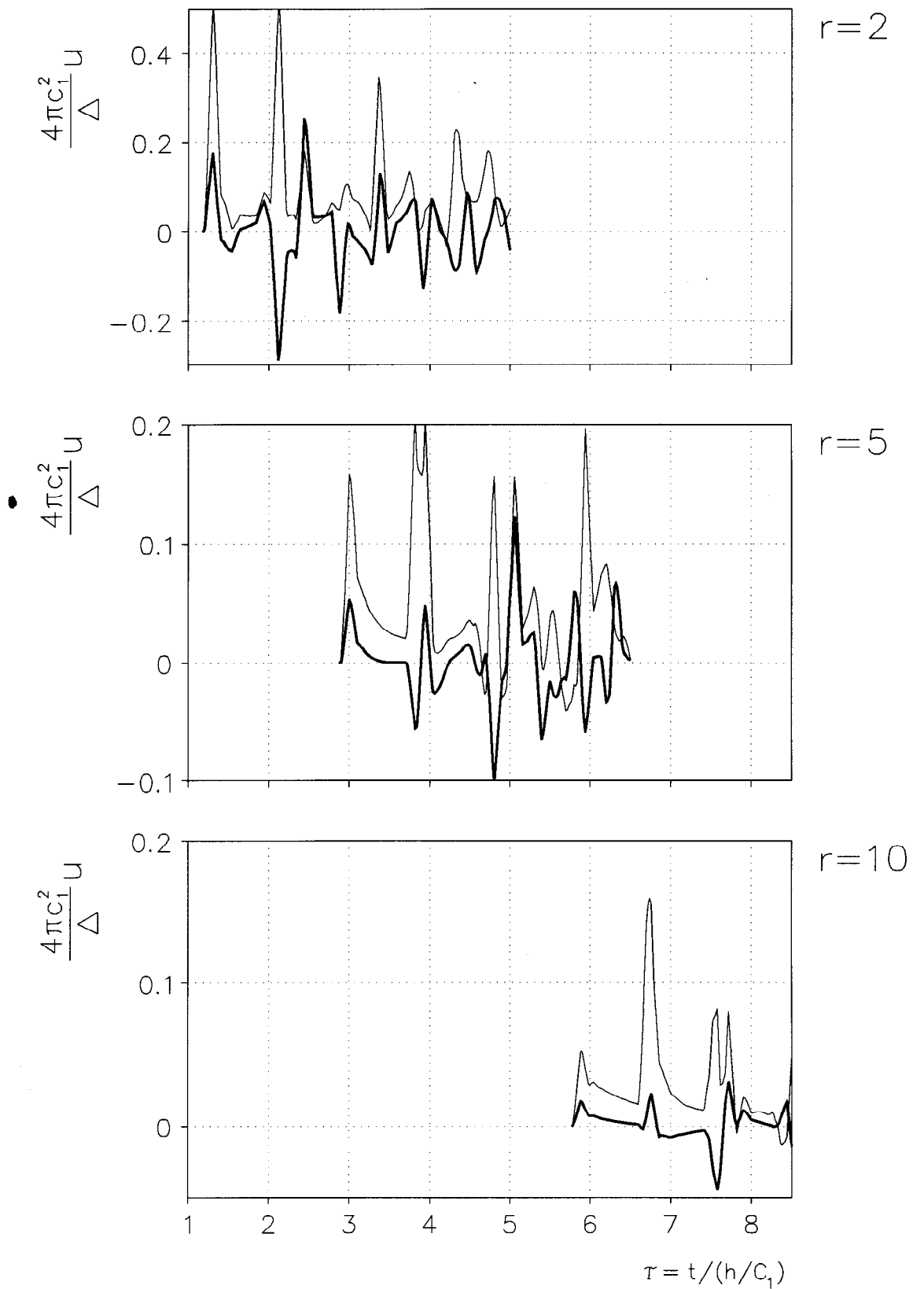


Obr. 19 pokračování
 d) pět; e) šest paprskových skupin;
 f) všechny paprsky před $\tau=6.5$.



Obr. 20

Vliv doby trvání zdroje na povrchové výchylky desky ($r=5$).



Obr. 21

Povrchové výchylky desky v různých vzdálenostech ($\Delta=0.1$)

2. Výchyly na povrchu vrstvy ležící na poloprostoru

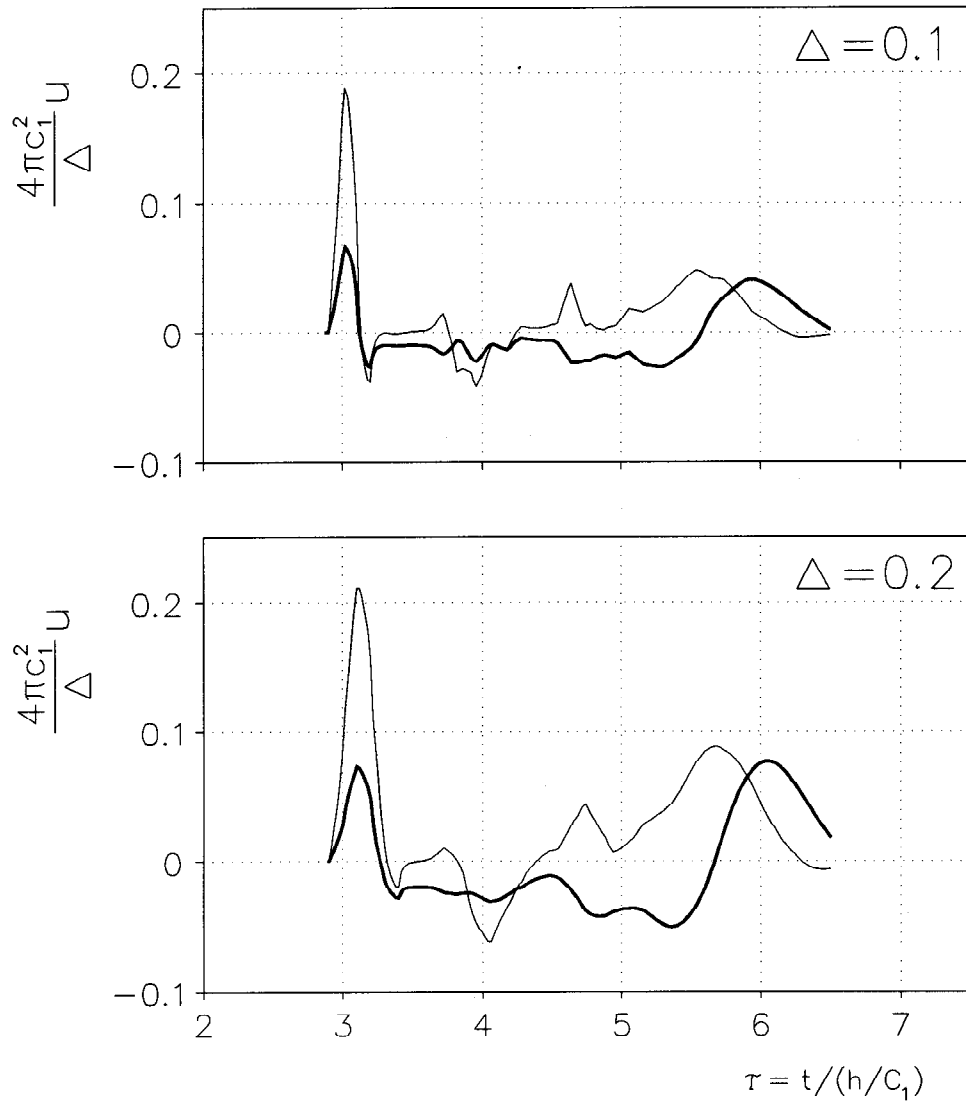
Řešení problému jedné vrstvy ležící na poloprostoru je znázorněno na obr.22. Výsledky pro vertikální výchylky mohou být porovnány s dřívějšími výpočty Pekerise a kol. (1965) a Altermana a Karala (1968).

Na rozdíl od desky toto řešení znázorňuje nápadnější počáteční odraz P-vlny od dolního povrchu, větší amplitudu první špičky. Následující odrazy od dolního povrchu rozptylují energii do poloprostoru, čímž se redukuje špičky odpovídající paprskům přicházejícím později.

Relativně velké rozruchy po $\tau=5.0$ jsou podobné vlivu Rayleighovy povrchové vlny znázorněné na obr.18, mají však odlišný charakter. Podle Pekerise a kol. (1965) odpovídají tyto rozruchy Airyově fázi Rayleighových vlastních módů [(2.38) v kapitole II.C]. Poněvadž Airyovy fáze klesají jako $r^{-1/3}$, kdežto jiné módy klesají jako $r^{-1/2}$, stávají se ve velkých vzdálenostech dominantní. Toto je evidentní v grafech znázorněných v předchozím odkaze pro $r=10h$ a $20h$.

Obr.22 znázorňuje též vliv trvání pulsu; $\Delta=0.1$ nebo 0.2 . Připomeňme, že výchylka u byla normalizována faktorem Q/Δ^2 [(7.13) a (7.16)]. Pro krátké časy zůstává špičková amplituda odezvy téměř konstantní, což způsobuje normovací faktor, kdežto trvání pulsu odezvy zdvojnásobuje. Avšak pro dlouhé časy (Airyova fáze Raileighových módů) zůstává trvání konstantní, kdežto amplitudy špiček se zdvojnásobují. Tedy amplitudy na počátku jsou nepřímo úměrné době náběhu zdroje a přímo úměrné velikosti zdroje, kdežto velikosti odezvy pro delší časy jsou přímo úměrné pouze velikosti zdroje.

Další numerické příklady jsou uvedeny v dodatku VII.D.



Obr. 22 Povrchové výchylky vyvolané bodovým zdrojem ve vrstvě ležící na poloprostoru

Dodatek II.A.1

Přímkový zdroj exploze v nekonečném prostředí

Dosažením Laplaceových obrazů vztahů (2.24) do rovnic (2.18) dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial z^2} - \frac{s^2 \bar{\Phi}}{c^2} &= \frac{-1}{c^2} \bar{f}(s) \delta(x) \delta(z-z_0) \quad , \\ \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial z^2} - \frac{s^2 \bar{\Psi}}{c^2} &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{II.1}$$

Z druhé rovnice (II.1) okamžitě plyne, že

$$\bar{\Psi} = 0. \tag{II.2}$$

První rovnici (II.1) zredukujeme na obyčejnou diferenciální rovnici pomocí Fourierovy transformace [(2.19)]

$$\frac{d^2 \tilde{\Phi}}{dz^2} - s^2 \eta^2 \tilde{\Phi} = \frac{-1}{c^2} \tilde{f}(s) \delta(z-z_0) \quad , \tag{II.3}$$

kde η je definováno v (2.22). Řešení této nehomogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu získáme například variací konstant. Partikulární řešení této rovnice je

$$\tilde{\Phi} = \frac{\tilde{f}(s)}{2s\eta c^2} e^{-s\eta(z-z_0)} \quad . \tag{II.4}$$

Zpětnou Fourierovou transformací [(2.20)] dostaneme

$$\bar{\Phi} = s \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{f}(s)}{4\pi c^2 s \eta} \frac{1}{\eta} e^{s(i\xi x - \eta|z-z_0|)} d\xi \quad . \tag{II.5}$$

Porovnáním vztahů (II.2) a (II.5) se vztahy (2.27) získáme

$$\bar{F}(s) = \frac{\tilde{f}(s)}{4\pi c^2 s} \quad , \quad S_p = \frac{1}{\eta} \quad \text{a} \quad S_v = 0 \quad ,$$

což je v souladu s prvním řádkem tabulky 1.

Explozivní bodový zdroj v nekonečném prostředí

Dosazením Laplaceových obrazů vztahů (2.32) do rovnic (2.18), kde $\nabla^2 = \partial^2/\partial r^2 + 1/r \partial/\partial r + \partial^2/\partial z^2$, dostaneme

$$\frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial z^2} - \frac{s^2}{c^2} \bar{\Phi} = \frac{-1}{c^2} \bar{f}(s) \delta(z-z_0) \frac{\delta(r)}{2\pi r} , \quad (II.6)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial z^2} - \frac{s^2}{c^2} \bar{\Psi} = 0 .$$

Z druhé rovnice (II.6) okamžitě plyne, že

$$\bar{\Psi} = 0. \quad (II.7)$$

První rovnici (II.6) zredukujeme na obyčejnou diferenciální rovnici pomocí Hankelovy transformace [(2.29)]

$$\frac{d^2 \hat{\Phi}}{dz^2} - s^2 \eta^2 \hat{\Phi} = \frac{-1}{2\pi c^2} \hat{f}(s) \delta(z-z_0) , \quad (II.8)$$

kde η je definováno v (2.22). Řešení této nehomogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu získáme například variací konstant. Partikulární řešení této rovnice je

$$\hat{\Phi} = \frac{\hat{f}(s)}{4\pi s \eta c^2} e^{-s\eta(z-z_0)} . \quad (II.9)$$

Zpětnou Hankelovou transformací [(2.29)] dostaneme

$$\bar{\Phi} = s^2 \int_0^\infty \frac{\bar{f}(s)}{4\pi c^2 s \eta} \frac{1}{\eta} e^{-s\eta|z-z_0|} J_0(s\xi r) \xi d\xi . \quad (II.10)$$

Porovnáním vztahů (II.7) a (II.10) se vztahy (2.35) získáme

$$\bar{F}(s) = \frac{\bar{f}(s)}{4\pi c^2 s} , \quad S_P = \frac{1}{\eta} \quad \text{a} \quad S_V = 0 ,$$

což je v souladu s prvním řádkem tabulky 1.

Přímková vertikální síla v nekonečném prostředí

Koncentrované přímkové zatížení může být vyjádřeno vztahem

$$F = f(t)\delta(x)\delta(z-z_0) \quad , \quad (\text{II.11})$$

kde $f(t)=0$ pro $t<0$. Poněvadž aplikované zatížení je nezávislé na y a poněvadž neexistují hranice, výchylka ve směru y a rovněž y -ové derivace všech proměnných napětového pole zmizí. Odezva neohraničeného prostředí na přímkovou vertikální sílu je antisymetrická vzhledem k rovině $z=z_0$. Důsledkem toho zmizí normálové napětí τ_{zz} v rovině $z=z_0$, alespoň pro $x \neq 0$. Ze stejného důvodu zmizí i výchylka ve směru x v rovině $z=z_0$. Vzhledem k těmto postřehům může být problém přímkového zatížení přeformulován na problém poloprostoru $z \geq z_0$ s následujícími okrajovými podmínkami v $z=z_0$:

$$\begin{aligned} \tau_{zz}(x, z_0, t) &= -\frac{1}{2}\delta(x)f(t) \\ u_x(x, z_0, t) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

Poněvadž prostředí je na počátku v klidu, počáteční podmínky jsou

$$\begin{aligned} u_x(x, z, 0) &= u_z(x, z, 0) = 0 \\ \dot{u}_x(x, z, 0) &= \dot{u}_z(x, z, 0) = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

Řešení problému je získáno aplikací jednostranné Laplaceovy transformace v čase (2.15) a Fourierovy transformace přes x (2.19). Po aplikaci integrálních transformací se rovnice (2.18) redukuje na následující diferenciální rovnice

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{\Phi}}{dz^2} - s^2 \eta^2 \tilde{\Phi} &= 0 \\ \frac{d^2 \tilde{\Psi}}{dz^2} - s^2 \zeta^2 \tilde{\Psi} &= 0 \quad , \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

kde η a ζ je definováno v (2.22). Řešení těchto homogenních lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu je

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi} &= A e^{-s\eta z} + B e^{s\eta z} \\ \tilde{\Psi} &= C e^{-s\zeta z} + D e^{s\zeta z}\end{aligned}\tag{II.15}$$

Konstanty B a D jsou rovny nule (z důvodu správného chování pro velké kladné hodnoty z). Aplikací integrálních transformací na okrajové podmínky (II.12) stanovíme konstanty A a C

$$A = -\frac{1}{2} \frac{\bar{f}(s)}{s^2 \rho} e^{s\eta z_0} \quad C = \frac{1}{2} \frac{\bar{f}(s)}{s^2 \rho} i \frac{\xi}{\zeta} e^{s\zeta z_0}$$

Dosazením těchto výrazů do rovnic (II.15) a provedením zpětné Fourierovy transformace [(2.20)] dostaneme

$$\begin{aligned}\bar{\Phi} &= s \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{f}(s)}{4\pi\rho s^2} (-1) e^{s(i\xi x - \eta|z-z_0|)} d\xi \\ \bar{\Psi} &= s \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{f}(s)}{4\pi\rho s^2} i \frac{\xi}{\zeta} e^{s(i\xi x - \zeta|z-z_0|)} d\xi\end{aligned}\tag{II.16}$$

Porovnáním vztahů (II.16) se vztahy (2.27) získáme

$$\bar{F}(s) = \frac{\bar{f}(s)}{4\pi\rho s^2}, \quad S_p = -1 \quad \text{a} \quad S_v = i \frac{\xi}{\zeta},$$

což je v souladu s druhým řádkem tabulky 1.

V případě $z \leq z_0$ lze problém přímkového zatížení přeformulovat na problém poloprostoru $z \leq z_0$ s následujícími okrajovými podmínkami v $z = z_0$:

$$\begin{aligned}\tau_{zz}(x, z_0, t) &= +\frac{1}{2} \delta(x) f(t) \\ u_x(x, z_0, t) &= 0\end{aligned}\tag{II.17}$$

Výsledky tohoto druhého případu jsou stejné až na hodnotu S_p , kdy $S_p = 1$, což je opět ve shodě s druhým řádkem tabulky 1.

Bodová vertikální síla v nekonečném prostředí

Koncentrované bodové zatížení může být vyjádřeno vztahem

$$F = f(t) \frac{\delta(r)}{2\pi r} \delta(z-z_0) \quad , \quad (\text{II.18})$$

kde $f(t)=0$ pro $t<0$. Poněvadž aplikované zatížení je nezávislé na φ a poněvadž neexistují hranice, výchylka ve směru φ a rovněž φ -té derivace všech proměnných napětového pole zmizí. Odezva neohrazeného prostředí na bodovou vertikální sílu je antisymetrická vzhledem k rovině $z=z_0$. Důsledkem toho zmizí normálové napětí τ_{zz} v rovině $z=z_0$, alespoň pro $r \neq 0$. Ze stejného důvodu zmizí i výchylka ve směru r v rovině $z=z_0$. Vzhledem k těmto postřehům může být problém bodového zatížení přeformulován na problém poloprostoru $z \geq z_0$ s následujícími okrajovými podmínkami v $z=z_0$:

$$\begin{aligned} \tau_{zz}(r, z_0, t) &= -\frac{1}{2} \frac{\delta(r)}{2\pi r} f(t) \\ u_r(r, z_0, t) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.19})$$

Poněvadž prostředí je na počátku v klidu, počáteční podmínky jsou

$$\begin{aligned} u_r(r, z, 0) &= u_z(r, z, 0) = 0 \\ \dot{u}_r(r, z, 0) &= \dot{u}_z(r, z, 0) = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

Řešení problému je získáno aplikací jednostranné Laplaceovy transformace v čase (2.15) a Hankelovy transformace přes r (2.29). Po aplikaci integrálních transformací se rovnice (2.18) redukuje na následující diferenciální rovnice

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \hat{\Phi}}{dz^2} - s^2 \eta^2 \hat{\Phi} &= 0 \\ \frac{d^2 \hat{\Psi}}{dz^2} - s^2 \zeta^2 \hat{\Psi} &= 0 \quad , \end{aligned} \quad (\text{II.21})$$

kde η a ζ je definováno v (2.22). Řešení těchto homogenních lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu je

$$\hat{\Phi} = A e^{-s\eta z} + B e^{s\eta z} \quad (\text{II.22})$$

$$\hat{\Psi} = C e^{-s\zeta z} + D e^{s\zeta z}$$

Konstanty B a D jsou rovny nule (z důvodu správného chování pro velké kladné hodnoty z). Aplikací integrálních transformací na okrajové podmínky (II.19) stanovíme konstanty A a C

$$A = \frac{1}{2} \frac{\bar{f}(s)}{s^2 \rho} e^{s\eta z_0} \quad C = \frac{1}{2} \frac{\bar{f}(s)}{s^2 \rho} \frac{\xi}{\zeta} e^{s\zeta z_0}$$

Dosazením těchto výrazů do rovnic (II.22) a provedením zpětné Hankelovy transformace [(2.29)] dostaneme

$$\bar{\Phi} = s^2 \int_0^\infty \frac{\bar{f}(s)}{4\pi\rho s^2} (-1) e^{-s\eta|z-z_0|} J_0(s\xi r) \xi \, d\xi \quad (\text{II.23})$$

$$\bar{\Psi} = s^2 \int_0^\infty \frac{\bar{f}(s)}{4\pi\rho s^2} \frac{\xi}{\zeta} e^{-s\zeta|z-z_0|} J_0(s\xi r) \xi \, d\xi$$

Porovnáním vztahů (II.23) se vztahy (2.35) získáme

$$\bar{F}(s) = \frac{\bar{f}(s)}{4\pi\rho s^2}, \quad S_p = -1 \quad \text{a} \quad S_v = \frac{\xi}{\zeta},$$

což je v souladu s druhým řádkem tabulky 1.

V případě $z \leq z_0$ lze problém bodového zatížení přeformulovat na problém poloprostoru $z \leq z_0$ s následujícími okrajovými podmínkami v $z=z_0$:

$$\begin{aligned} \tau_{zz}(r, z_0, t) &= +\frac{1}{2} \frac{\delta(x)}{2\pi r} f(t) \\ u_r(r, z_0, t) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.24})$$

Výsledky tohoto druhého případu jsou stejné až na hodnotu S_p , kdy $S_p=1$, což je opět ve shodě s druhým řádkem tabulky 1.

Dodatek II.A.5

Přímková vertikální síla na volném povrchu poloprostoru

Koncentrované přímkové zatížení na volném povrchu poloprostoru může být vyjádřeno vztahem

$$F = f(t)\delta(x)\delta(z) \quad , \quad (\text{II.25})$$

kde $f(t)=0$ pro $t<0$. Poněvadž aplikované zatížení je nezávislé na y a poněvadž neexistují hranice, výchylka ve směru y a rovněž y -ové derivace všech proměnných napětového pole zmizí.

Okrajové podmínky na volném povrchu jsou :

$$\begin{aligned} \tau_{zz}(x, 0, t) &= -\delta(x)f(t) \\ \tau_{zx}(x, 0, t) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.26})$$

Poněvadž prostředí je na počátku v klidu, počáteční podmínky jsou

$$\begin{aligned} u_x(x, z, 0) &= u_z(x, z, 0) = 0 \\ \dot{u}_x(x, z, 0) &= \dot{u}_z(x, z, 0) = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.27})$$

Řešení problému je získáno aplikací jednostranné Laplaceovy transformace v čase (2.15) a Fourierovy transformace přes x (2.19). Po aplikaci integrálních transformací se rovnice (2.18) redukuje na následující diferenciální rovnice

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{\Phi}}{dz^2} - s^2 \eta^2 \tilde{\Phi} &= 0 \\ \frac{d^2 \tilde{\Psi}}{dz^2} - s^2 \zeta^2 \tilde{\Psi} &= 0 \quad , \end{aligned} \quad (\text{II.28})$$

kde η a ζ je definováno v (2.22). Řešení těchto homogenních lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu je

$$\tilde{\Phi} = A e^{-s\eta z} + B e^{s\eta z} \quad (\text{II.29})$$

$$\tilde{\Psi} = C e^{-s\zeta z} + D e^{s\zeta z}$$

Konstanty B a D jsou rovny nule (z důvodu správného chování pro velké kladné hodnoty z). Aplikací integrálních transformací na okrajové podmínky (II.26) stanovíme konstanty A a C

$$A = \frac{\bar{f}(s)}{s^2 \mu} \frac{\xi^2 + \zeta^2}{4\xi^2 \zeta \eta - (\xi^2 + \zeta^2)} \quad C = -i \frac{\bar{f}(s)}{s^2 \mu} \frac{2\xi \eta}{4\xi^2 \zeta \eta - (\xi^2 + \zeta^2)}$$

Dosazením těchto výrazů do rovnic (II.29) a provedením zpětné Fourierovy transformace [(2.20)] dostaneme

$$\bar{\Phi} = s \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{f}(s)}{2\pi\mu s^2} \frac{\xi^2 + \zeta^2}{\Delta} e^{s(i\xi x - \eta z)} d\xi \quad (\text{II.30})$$

$$\bar{\Psi} = s \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{f}(s)}{2\pi\mu s^2} \left(-i \frac{2\xi \eta}{\Delta}\right) e^{s(i\xi x - \zeta z)} d\xi$$

kde $\Delta = 4\xi^2 \zeta \eta - (\xi^2 + \zeta^2)^2$.

Porovnáním vztahů (II.30) se vztahy (2.27) získáme

$$\bar{F}(s) = \frac{\bar{f}(s)}{2\pi\mu s^2}, \quad S_p = \frac{\xi^2 + \zeta^2}{\Delta} \quad \text{a} \quad S_v = -i \frac{2\xi \eta}{\Delta},$$

což je v souladu s třetím řádkem tabulky 1.

Bodová vertikální síla na volném povrchu poloprostoru

Koncentrované bodové zatížení na volném povrchu poloprostoru může být vyjádřeno vztahem

$$F = f(t) \frac{\delta(r)}{2\pi r} \delta(z) \quad , \quad (\text{II.31})$$

kde $f(t)=0$ pro $t<0$. Poněvadž aplikované zatížení je nezávislé na φ a poněvadž neexistují hranice, výchylka ve směru φ a rovněž φ -té derivace všech proměnných napětového pole zmizí.

Okrajové podmínky na volném povrchu jsou :

$$\begin{aligned} \tau_{zz}(r, 0, t) &= -\frac{\delta(r)}{2\pi r} f(t) \\ \tau_{zr}(r, 0, t) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.32})$$

Poněvadž prostředí je na počátku v klidu, počáteční podmínky jsou

$$\begin{aligned} u_z(r, z, 0) &= u_r(r, z, 0) = 0 \\ \dot{u}_z(r, z, 0) &= \dot{u}_r(r, z, 0) = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.33})$$

Řešení problému je získáno aplikací jednostranné Laplaceovy transformace v čase (2.15) a Hankelovy transformace přes r (2.29). Po aplikaci integrálních transformací se rovnice (2.18) redukuje na následující diferenciální rovnice

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{\Phi}}{dz^2} - s^2 \eta^2 \tilde{\Phi} &= 0 \\ \frac{d^2 \tilde{\Psi}}{dz^2} - s^2 \zeta^2 \tilde{\Psi} &= 0 \quad , \end{aligned} \quad (\text{II.34})$$

kde η a ζ je definováno v (2.22). Řešení těchto homogenních lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu je

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi} &= A e^{-s\eta z} + B e^{s\eta z} \\ \tilde{\Psi} &= C e^{-s\zeta z} + D e^{s\zeta z}\end{aligned}\tag{II.35}$$

Konstanty B a D jsou rovny nule (z důvodu správného chování pro velké kladné hodnoty z). Aplikací integrálních transformací na okrajové podmínky (II.26) stanovíme konstanty A a C

$$A = \frac{\bar{f}(s)}{s^2 \mu} \frac{\xi^2 + \zeta^2}{4\xi^2 \zeta \eta - (\xi^2 + \zeta^2)} \quad C = -\frac{\bar{f}(s)}{s^2 \mu} \frac{2\xi \eta}{4\xi^2 \zeta \eta - (\xi^2 + \zeta^2)}$$

Dosazením těchto výrazů do rovnic (II.29) a provedením zpětné Hankelovy transformace [(2.29)] dostaneme

$$\begin{aligned}\bar{\Phi} &= s^2 \int_0^\infty \frac{\bar{f}(s)}{2\pi\mu s^2} \frac{\xi^2 + \zeta^2}{\Delta} e^{-s\eta z} J_0(s\xi r) \xi \, d\xi \\ \bar{\Psi} &= s^2 \int_0^\infty \frac{\bar{f}(s)}{2\pi\mu s^2} \left(-\frac{2\xi\eta}{\Delta}\right) e^{-s\zeta z} J_0(s\xi r) \xi \, d\xi\end{aligned}\tag{II.36}$$

kde $\Delta = 4\xi^2 \zeta \eta - (\xi^2 + \zeta^2)^2$.

Porovnáním vztahů (II.30) se vztahy (2.27) získáme

$$\bar{F}(s) = \frac{\bar{f}(s)}{2\pi\mu s^2}, \quad S_p = \frac{\xi^2 + \zeta^2}{\Delta} \quad \text{a} \quad S_v = -\frac{2\xi\eta}{\Delta},$$

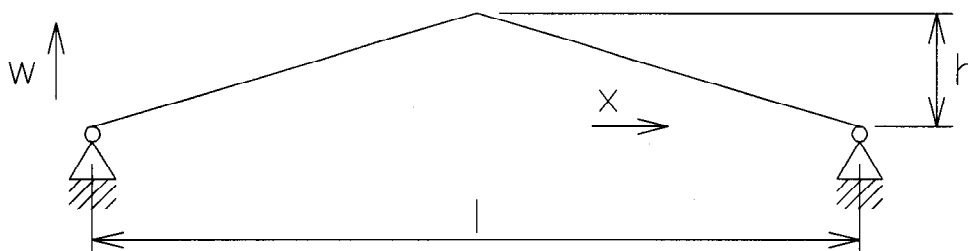
což je v souladu s třetím řádkem tabulky 1.

Dodatek II.B

Metoda Bromwichova rozvoje

V roce 1916 popsal Bromwich na jednorozměrném problému vlnového šíření (struna), že rozvoj v záporné mocniny exponenciál představuje pohyb rozložený do série impulsů.

Uvažujme homogenní, dokonale ohebnou pružnou strunu délky l , která je napnuta mezi pevnými koncovými body. Struna je uprostřed vychýlena o h a puštěna (viz obr.II.1).



Obr. II.1

Vlnová rovnice pro příčnou výchylku w je

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (\text{II.1})$$

Počáteční podmínky jsou následující :

$$\begin{aligned} w(0, x) &= \frac{2h}{l} x && \text{pro } x \in \langle 0; 1/2 \rangle \\ &= \frac{2h}{l} (1-x) && \text{pro } x \in \langle 1/2; 0 \rangle \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad (\text{II.2})$$

Z důvodu symetrie uvažujeme pouze polovinu struny $\langle 0; 1/2 \rangle$. Po provedení Laplaceovy transformace rovnice (II.1) dostaneme

$$s^2 \bar{w}(s, x) - s w(0+, x) - w'(0+, x) = c^2 \frac{d^2 \bar{w}(s, x)}{dx^2} \quad (\text{II. 3})$$

Dosazením počátečních podmínek do této rovnice obdržíme nehomogenní lineární diferenciální rovnici 2. řádu

$$\frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} - \frac{s^2}{c^2} \bar{w} = -\frac{s}{c^2} \frac{2h}{l} x \quad (\text{II. 4})$$

Rovnici (II. 4) vyřešíme pomocí variací konstant

$$\bar{w}(s, x) = A e^{sx/c} + B e^{-sx/c} + 2 \frac{h}{l} \frac{x}{s}, \quad (\text{II. 5})$$

kde A a B jsou konstanty, které určíme z Laplaceových obrazů okrajových podmínek

$$\begin{aligned} \bar{w}(s, 0) &= 0 \\ \frac{d \bar{w}(s, l/2)}{dx} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II. 6})$$

Tedy

$$\bar{w}(s, x) = \frac{kx}{s} - \frac{kc}{s^2} \frac{\sinh(\frac{sx}{c})}{\cosh(\frac{s}{c} \frac{l}{2})}, \quad (\text{II. 7})$$

kde $k=2h/l$.

Vztah (II. 7) představuje Laplaceův obraz řešení. Nyní je naším úkolem stanovit časovou závislost příčné výchylky w . Tuto operaci provedeme nejprve klasickou metodou - zpětnou Laplaceovou transformací - a potom Bromwichovým rozvojem.

1. Zpětná Laplaceova transformace

Zpětnou Laplaceovu transformaci vztahu (II. 7) provedeme pomocí sumy reziduí. Funkce (II. 7) má póly pouze 1. řádu, a to v bodech, které jsou kořeny rovnice

$$\cosh\left(\frac{s}{c} \frac{l}{2}\right) = 0,$$

tj. v bodech

$$s_n = (2n+1)\pi i \frac{c}{l}, \quad n \text{ celé.}$$

Tedy rezidua jsou

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{s=(2n+1)\pi ic/l} &= \left[\frac{kxs \cosh\left(\frac{s}{c} \frac{l}{2}\right) - kc \sinh\left(\frac{s}{c} x\right)}{s^2 \cosh\left(\frac{s}{c} \frac{l}{2}\right)} \right] e^{st} \\ &= \frac{kl^2 \sin\left[\frac{x}{l}\pi(2n+1)\right]}{(2n+1)^2 \pi^2 \frac{l}{2} (-1)^n} e^{(2n+1)\pi ic/l} \end{aligned}$$

Odtud

$$w(t, x) = \frac{4kl}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin\left[\frac{x}{l}\pi(2n+1)\right] \cos\left[(2n+1)\pi t \frac{c}{l}\right]. \quad (\text{II.8})$$

Ze vztahu (II.8) je patrné, že příčná výchylka struny nám při tomto způsobu řešení vyšla ve tvaru nekonečné sumy, jejíž argument obsahuje součin harmonické funkce času t a harmonické funkce souřadnice x . Nevýhodou tohoto tvaru řešení je právě existence nekonečné sumy, která nám neumožňuje přesný výpočet. Vždy jsme omezeni výběrem konečného počtu členů řady; jedná se zde o analogii počtu disperzních křivek při řešení takových úloh jako tlustá deska, ráz tyčí atd. Naopak, pokud se smíříme s výše zmíněnou nepřesností, je při tomto tvaru řešení jedno, zda počítáme odezvu struny pro krátké nebo dlouhé časy (doba výpočtu je přibližně stejná).

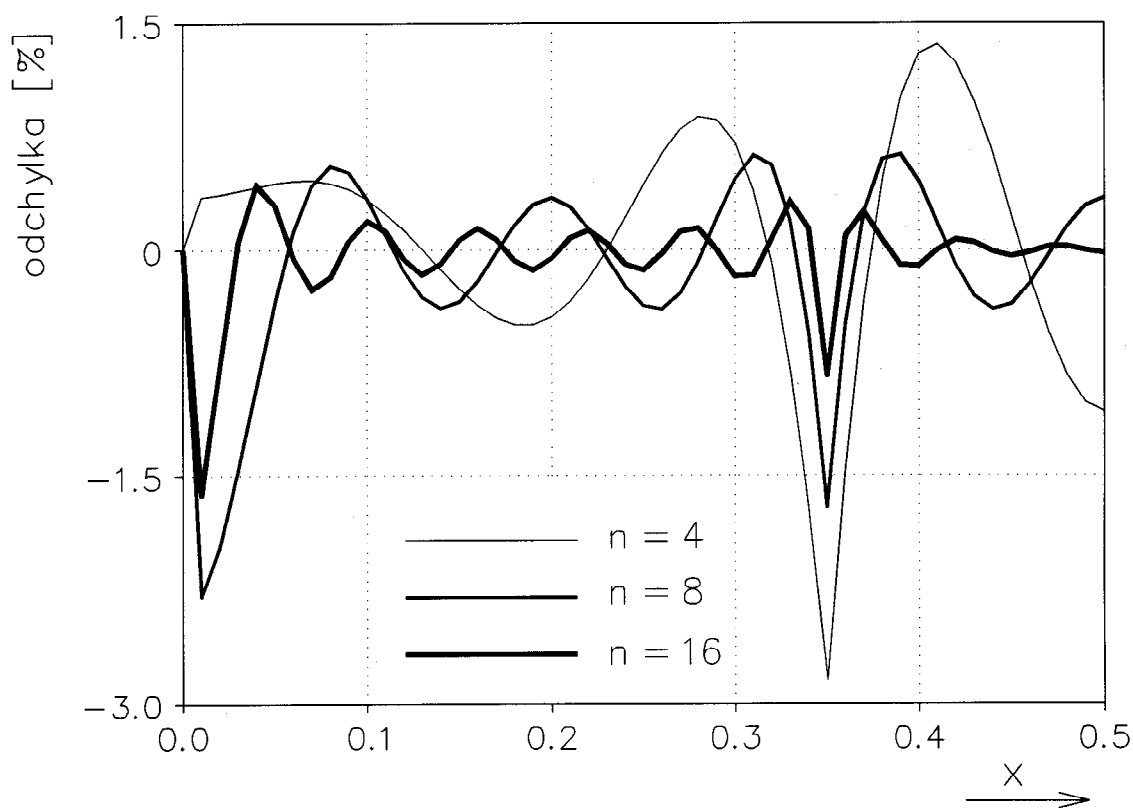
Na obr.II.2 jsou znázorněny relativní odchylky příčných posuvů w podél osy x v čase $t=0.15$ od přesného řešení pro několik hodnot počtu sumací n (4, 8 a 16); ostatní parametry jsou $l=1$, $c=1$, $k=1$.

2. Bromwichův rozvoj

Bromwich ukázal, že je často možné nahradit Laplaceův obraz řešení řadou členů

$$e^{-sa}/s^{n+1},$$

kde a je reálné a n je celé číslo.



Obr. II. 2

Odpovídající předmět je :

$$\frac{(t-a)^n}{n!} \quad \text{pro } t > a$$

$$0 \quad \text{pro } t < a .$$

Aplikujeme tedy tento postup na náš Laplaceův obraz řešení vlnového šíření ve struně (II.7)

$$\begin{aligned} & \frac{kx}{s} - \frac{kC}{s^2} \frac{\sinh\left(\frac{sX}{C}\right)}{\cosh\left(\frac{s}{C} \frac{l}{2}\right)} \\ &= \frac{kx}{s} - \frac{kC}{s^2} \left[e^{-s/c(1/2-x)} - e^{-s/c(1/2+x)} \right] \frac{1}{1+e^{-sl/c}} \\ &= \frac{kx}{s} - \frac{kC}{s^2} \left[e^{-s/c(1/2-x)} - e^{-s/c(1/2+x)} \right] \left[1 - e^{-sl/c} + e^{-2sl/c} - \dots \right] \end{aligned} \quad (\text{II. 9})$$

Konvergence této řady je zajištěna, pokud $|e^{-sl/c}| < 1$, reálná

část s je kladná. Nyní provedeme Laplaceovu transformaci řady (II.9) člen po členu

$$\begin{aligned}
 & kx - kc \left(t - \frac{l/2-x}{c} \right) H \left(t - \frac{l/2-x}{c} \right) + kc \left(t - \frac{l/2+x}{c} \right) H \left(t - \frac{l/2+x}{c} \right) \\
 & + kc \left(t - \frac{3l/2-x}{c} \right) H \left(t - \frac{3l/2-x}{c} \right) - kc \left(t - \frac{3l/2+x}{c} \right) H \left(t - \frac{3l/2+x}{c} \right) \\
 & - kc \left(t - \frac{5l/2-x}{c} \right) H \left(t - \frac{5l/2-x}{c} \right) + kc \left(t - \frac{5l/2+x}{c} \right) H \left(t - \frac{5l/2+x}{c} \right) + \dots \\
 & = kx + kc \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \left(t - \frac{(2n-1)l-x}{c} \right) H \left(t - \frac{(2n-1)l-x}{c} \right) \right. \\
 & \quad \left. - \left(t - \frac{(2n-1)l+x}{c} \right) H \left(t - \frac{(2n-1)l+x}{c} \right) \right\} \quad (\text{II.10})
 \end{aligned}$$

Metodou Bromwichova rozvoje jsme dostali příčnou výchylku struny také ve tvaru nekonečné sumy, ale nyní již argument sumy neobsahuje harmonické funkce času t ani souřadnice x . Výhodou tohoto tvaru řešení je možnost získat pro daný čas t a polohu x naprosto přesné řešení. Naopak se tento tvar řešení nehodí pro výpočet odezvy struny pro dlouhé časy, neboť se zvětšující se dobou pozorování se úměrně prodlužuje i doba výpočtu (i když v tomto jednoduchém případě jde spíše o akademickou otázku; jiná situace však již nastane při problému šíření napěťových vln v tlustých deskách, který je řešen pomocí paprskové teorie). Na závěr provedeme vyčíslení vztahu (II.10) pro několik prvních členů řady :

i)	$0 < t < (l/2-x)/c$	$w = kx$,
ii)	$(l/2-x)/c < t < (l/2+x)/c$	$w = k(l/2-ct)$,
iii)	$(l/2+x)/c < t < (3l/2-x)/c$	$w = -kx$,
iv)	$(3l/2-x)/c < t < (3l/2+x)/c$	$w = k(ct-3l/2)$,
v)	$(3l/2+x)/c < t < (5l/2-x)/c$	$w = kx$.

Mullerova metoda řešení nelineárních rovnic

Tato metoda pro nalezení kořene nelineární rovnice byla vyložena Mullerem v roce 1956 a její aplikace na počítačích se setkala s pozoruhodným úspěchem. Mullerovu metodu lze použít jak pro nalezení reálných tak i komplexních kořenů libovolné funkce. Metoda je iterativní, v okolí kořene konverguje téměř kvadraticky (1.84) a nevyžaduje vyhodnocení derivace funkce.

Mullerova metoda je v podstatě rozšířením metody sečen. V metodě sečen určujeme (z aproximací x_i a x_{i-1}) příští aproximaci x_{i+1} jako nulu lineárního polynomu $p(x)$, který prochází dvěma body $\{x_i, f(x_i)\}$ a $\{x_{i-1}, f(x_{i-1})\}$. V Mullerově metodě je další aproximace x_{i+1} nalezena jako nula paraboly, která prochází třemi body $\{x_i, f(x_i)\}$, $\{x_{i-1}, f(x_{i-1})\}$ a $\{x_{i-2}, f(x_{i-2})\}$.

Nechť x_i , x_{i-1} a x_{i-2} jsou tři různé aproximace kořenu rovnice $f(x)=0$. Použijeme-li tradiční způsob zápisu polynomu, dostaneme

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Má-li tato parabola procházet třemi body x_i , x_{i-1} a x_{i-2} , musí a_0 , a_1 a a_2 splňovat následující podmínky

$$a_2 = \frac{\frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} - \frac{f_i - f_{i-2}}{x_i - x_{i-2}}}{x_{i-1} - x_{i-2}}$$

$$a_1 = \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} - a_2 (x_i + x_{i-1})$$

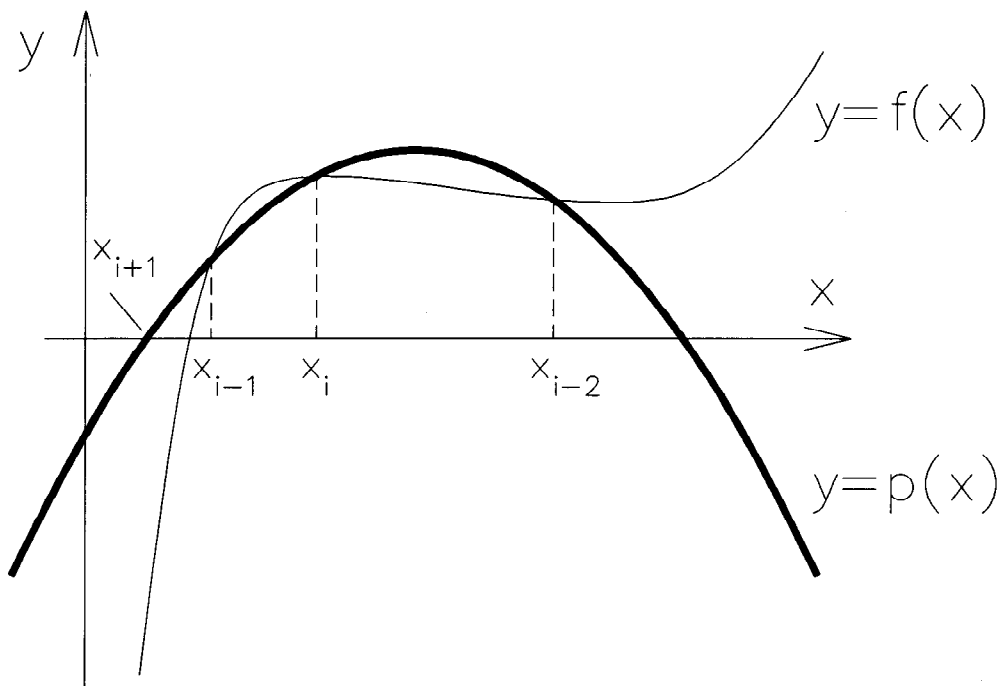
$$a_0 = f_i - a_1 x_i - a_2 x_i^2 \quad ,$$

kde $f_i = f(x_i)$, $f_{i-1} = f(x_{i-1})$ a $f_{i-2} = f(x_{i-2})$.

Jakmile jsou čísla a_0 , a_1 a a_2 vypočtena, mohou být kořeny $p(x)$ určeny kvadratickým vzorcem pro maximální přesnost

$$x = \frac{2a_0}{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}$$

Znaménko před odmocninou je určeno tak, aby byl jmenovatel v absolutní hodnotě největší. Odpovídající kořen je potom považován za další aproximaci x_{i+1} . Postup se potom opakuje s x_{i-1} , x_i a x_{i+1} jako novými aproximacemi. Jestliže jsou získané kořeny reálné, je situace znázorněná na obr. VII.1.



Obr. VII.1 Mullerova metoda

Dodatek VII.B

Legendrův-Gaussův kvadraturní vzorec

Mějme obecný kvadraturní vzorec tvaru

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{j=1}^n H_j f(a_j) ,$$

tedy aproximace určitého integrálu funkce $f(x)$ je vyjádřena lineární kombinací funkčních hodnot $f(x)$ v bodech a_j .

Legendrův-Gaussův kvadraturní vzorec patří do skupiny Gaussových kvadraturních vzorců, u nichž nejsou uzly (a_j) a koeficienty (H_j) podrobeny žádným omezujícím podmínkám a jsou určeny tak, abychom dosáhli největšího možného stupně přesnosti.

V případě Legendrova-Gaussova kvadraturního vzorce jsou uvažovány meze integrace $\langle -1, 1 \rangle$, uzly (a_j) jsou rovny kořenům Legendrova polynomu P_n (obr.VII.2) a pro koeficienty (H_j) platí

$$H_j = \frac{-2}{(n+1)P_{n+1}(a_j)P'_n(a_j)} .$$

V tabulce VII.1 jsou uvedeny koeficienty Legendrových polynomů řádu 0 až 20. V tabulce VII.2 jsou uvedeny kořeny (a_j) Legendrových polynomů P_n a koeficienty (H_j) Legendrova-Gaussova kvadraturního vzorce.

Koeficienty H_j a uzly a_j pro obecný interval $\langle a, b \rangle$ získáme z a_j a H_j jednoduchou substitucí

$$H_j = \frac{b-a}{2} H_j , \quad a_j = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} a_j .$$

Tabulka VII.1 Koeficienty Legendrových polynomů

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n p_i/d x^i$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
p_0	1	0	-1	0	3	0	-5	0	35
p_1		1	0	-3	0	15	0	-35	0
p_2			3	0	-30	0	105	0	-1260
p_3				5	0	-70	0	315	0
p_4					35	0	-315	0	6930
p_5						63	0	-693	0
p_6							231	0	-12012
p_7								429	0
p_8									6435
d	1	1	2	2	8	8	16	16	128

n	9	10	11	12	13
p_0	0	-63	0	231	0
p_1	315	0	-693	0	3003
p_2	0	3465	0	-18018	0
p_3	-4620	0	15015	0	-90090
p_4	0	-30030	0	225225	0
p_5	18018	0	-90090	0	765765
p_6	0	90090	0	-1021020	0
p_7	-25740	0	218790	0	-2771340
p_8	0	-109395	0	2078505	0
p_9	12155	0	-230945	0	4849845
p_{10}		46189	0	-1939938	0
p_{11}			88179	0	-4056234
p_{12}				676039	0
p_{13}					1300075
d	128	256	256	1024	1024

Tabulka VII.1 Koeficienty Legendrových polynomů - pokrač.

n	14	15	16	17
p_0	-429	0	6435	0
p_1	0	-6435	0	109395
p_2	45045	0	-875160	0
p_3	0	255255	0	-5542680
p_4	-765765	0	19399380	0
p_5	0	-2909907	0	81477396
p_6	4849845	0	-162954792	0
p_7	0	14549535	0	-535422888
p_8	-14549535	0	669278610	0
p_9	0	-37182145	0	1859107250
p_{10}	22309287	0	-1487285800	0
p_{11}	0	50702925	0	-3650610600
p_{12}	-16900975	0	1825305300	0
p_{13}	0	-35102025	0	4071834900
p_{14}	5014575	0	-1163381400	0
p_{15}		9694845	0	-2404321560
p_{16}			300540195	0
p_{17}				583401555
d	2048	2048	32768	32768

Tabulka VII.1 Koeficienty Legendrových polynomů - pokrač.

n	18	19	20
P_0	-12155	0	46189
P_1	0	-230945	0
P_2	2078505	0	-9699690
P_3	0	14549535	0
P_4	-58198140	0	334639305
P_5	0	-267711444	0
P_6	624660036	0	-4461857400
P_7	0	2230928700	0
P_8	-3346393050	0	30117537450
P_9	0	-10039179150	0
P_{10}	10039179150	0	-116454478140
P_{11}	0	26466926850	0
P_{12}	-17644617900	0	273491577450
P_{13}	0	-42075627300	0
P_{14}	18032411700	0	-396713057400
P_{15}	0	39671305740	0
P_{16}	-9917826435	0	347123925225
P_{17}	0	-20419054425	0
P_{18}	2268783825	0	-167890003050
P_{19}		4418157975	0
P_{20}			34461632205
d	65536	65536	262144

Tabulka VII.2

Kořeny (a_j) Legendrových polynomů P_n a koeficienty (H_j) Legendrova-Gaussova kvadraturního vzorce.

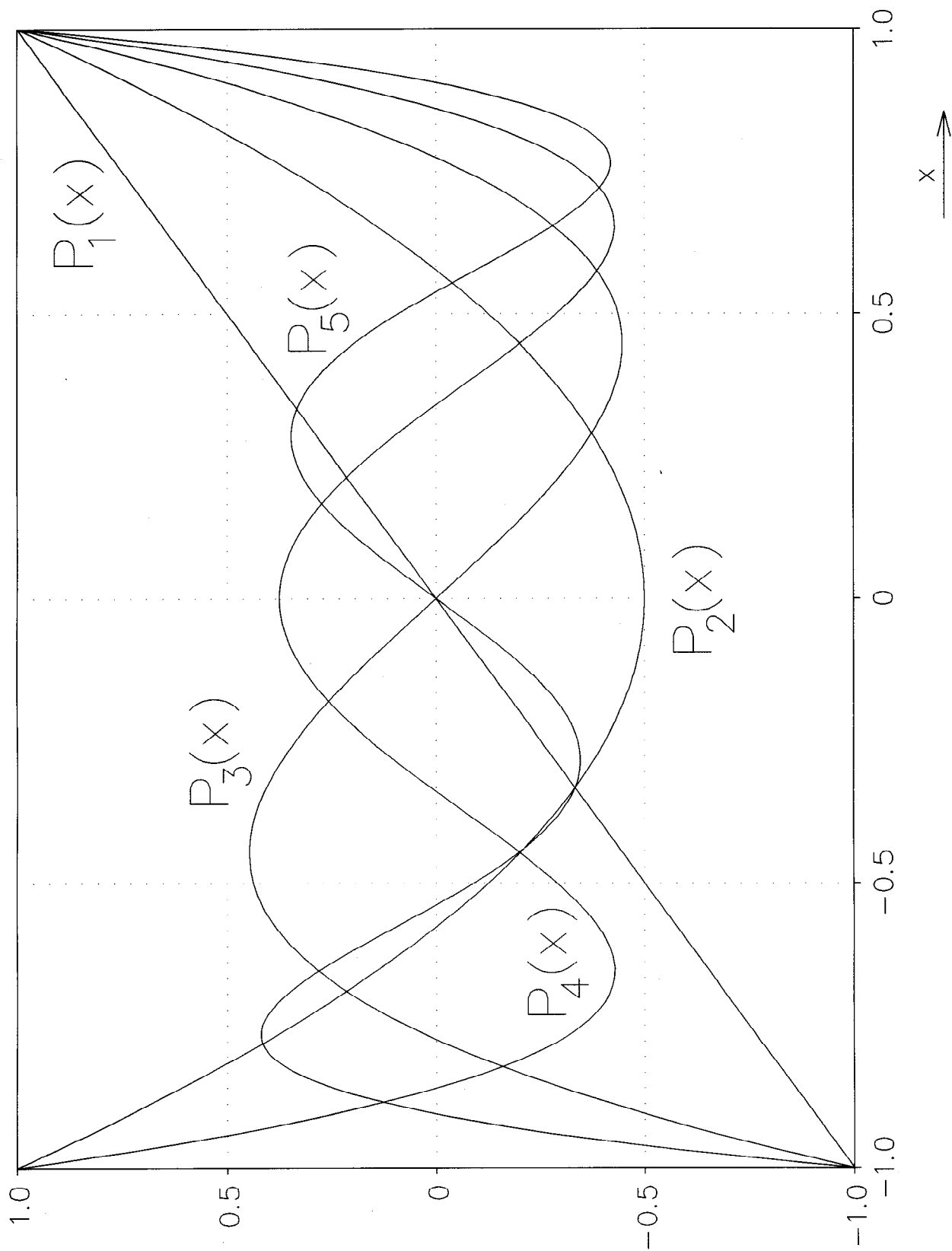
n	a_j	H_j
1	0.000000000000000000E+00	2.000000000000000000E+00
2	±5.77350269189625764E-01	1.000000000000000000E+00
3	0.000000000000000000E+00 ±7.74596669241483377E-01	8.88888888888888889E-01 5.5555555555555556E-01
4	±3.39981043584856265E-01 ±8.61136311594052575E-01	6.52145154862546143E-01 3.47854845137453858E-01
5	0.000000000000000000E+00 ±5.38469310105683091E-01 ±9.06179845938663993E-01	5.68888888888888889E-01 4.78628670499366468E-01 2.36926885056189088E-01
6	±2.38619186083196909E-01 ±6.61209386466264514E-01 ±9.32469514203152028E-01	4.67913934572691047E-01 3.60761573048138608E-01 1.71324492379170344E-01
7	0.000000000000000000E+00 ±4.05845151377397167E-01 ±7.41531185599394440E-01 ±9.49107912342758524E-01	4.17959183673469388E-01 3.81830050505118945E-01 2.79705391489276668E-01 1.29484966168869695E-01
8	±1.83434642495649805E-01 ±5.25532409916328986E-01 ±7.96666477413626739E-01 ±9.60289856497536232E-01	3.62683783378361983E-01 3.13706645877887288E-01 2.22381034453374468E-01 1.01228536290376258E-01
9	0.000000000000000000E+00 ±3.24253423403808929E-01 ±6.13371432700590397E-01 ±8.36031107326635795E-01 ±9.68160239507626090E-01	3.30239355001259763E-01 3.12347077040002840E-01 2.60610696402935462E-01 1.80648160694857408E-01 8.12743883615744023E-02
10	±1.48874338981631211E-01 ±4.33395394129247191E-01 ±6.79409568299024406E-01 ±8.65063366688984511E-01 ±9.73906528517171720E-01	2.95524224714752870E-01 2.69266719309996355E-01 2.19086362515982042E-01 1.49451349150580580E-01 6.66713443086881144E-02

Tabulka VII.2 - pokračování

n	a_j	H_j
11	0.000000000000000000E+00 ±2.69543155952344972E-01 ±5.19096129206811816E-01 ±7.30152005574049323E-01 ±8.87062599768095301E-01 ±9.78228658146056992E-01	2.72925086777900631E-01 2.62804544510246662E-01 2.33193764591990480E-01 1.86290210927734246E-01 1.25580369464904656E-01 5.56685671161736734E-02
12	±1.25233408511468915E-01 ±3.67831498998180194E-01 ±5.87317954286617448E-01 ±7.69902674194304687E-01 ±9.04117256370474858E-01 ±9.81560634246719251E-01	2.49147045813402785E-01 2.33492536538354809E-01 2.03167426723065923E-01 1.60078328543346224E-01 1.06939325995318438E-01 4.71753363865117880E-02
13	0.000000000000000000E+00 ±2.30458315955134794E-01 ±4.48492751036446853E-01 ±6.42349339440340220E-01 ±8.01578090733309911E-01 ±9.17598399222977961E-01 ±9.84183054718588153E-01	2.32551553230873910E-01 2.26283180262897238E-01 2.07816047536888502E-01 1.78145980761945735E-01 1.38873510219787241E-01 9.21214998377284946E-02 4.04840047653160308E-02
14	±1.08054948707343662E-01 ±3.19112368927889760E-01 ±5.15248636358154092E-01 ±6.87292904811685468E-01 ±8.27201315069764992E-01 ±9.28434883663573506E-01 ±9.86283808696812349E-01	2.15263853463157790E-01 2.05198463721295604E-01 1.85538397477937814E-01 1.57203167158193547E-01 1.21518570687903126E-01 8.01580871597601854E-02 3.51194603317519519E-02
15	0.000000000000000000E+00 ±2.01194093997434522E-01 ±3.94151347077563370E-01 ±5.70972172608538846E-01 ±7.24417731360170049E-01 ±8.48206583410427202E-01 ±9.37273392400705926E-01 ±9.87992518020485438E-01	2.02578241925561273E-01 1.98431485327111576E-01 1.86161000015562210E-01 1.66269205816993933E-01 1.39570677926154336E-01 1.07159220467171798E-01 7.03660474881084459E-02 3.07532419961181104E-02

Tabulka VII.2 - pokračování

n	a_j	H_j
16	$\pm 9.50125098376374402E-02$ $\pm 2.81603550779258913E-01$ $\pm 4.58016777657227386E-01$ $\pm 6.17876244402643750E-01$ $\pm 7.55404408355003054E-01$ $\pm 8.65631202387831734E-01$ $\pm 9.44575023073232582E-01$ $\pm 9.89400934991649950E-01$	$1.89450610455068496E-01$ $1.82603415044923589E-01$ $1.69156519395002540E-01$ $1.49595988816576680E-01$ $1.24628971255534046E-01$ $9.51585116824936411E-02$ $6.22535239386470226E-02$ $2.71524594117544476E-02$
17	$0.00000000000000000E+00$ $\pm 1.78484181495847856E-01$ $\pm 3.51231763453876315E-01$ $\pm 5.12690537086476968E-01$ $\pm 6.57671159216690754E-01$ $\pm 7.81514003896801442E-01$ $\pm 8.80239153726985934E-01$ $\pm 9.50675521768767761E-01$ $\pm 9.90575475314417400E-01$	$1.79446470356206525E-01$ $1.76562705366992646E-01$ $1.68004102156450044E-01$ $1.54045761076810294E-01$ $1.35136368468525480E-01$ $1.11883847193403855E-01$ $8.50361483171810656E-02$ $5.54595293739882349E-02$ $2.41483028685497161E-02$
18	$\pm 8.47750130417353012E-02$ $\pm 2.51886225691505510E-01$ $\pm 4.11751161462842645E-01$ $\pm 5.59770831073947535E-01$ $\pm 6.91687043060353232E-01$ $\pm 8.03704958972523175E-01$ $\pm 8.92602466497556032E-01$ $\pm 9.55823949571397503E-01$ $\pm 9.91565168420930806E-01$	$1.69142382963143592E-01$ $1.64276483745832723E-01$ $1.54684675126265247E-01$ $1.40642914670650710E-01$ $1.22555206711478826E-01$ $1.00942044106286951E-01$ $7.64257302548870494E-02$ $4.97145488949539066E-02$ $2.16160135264859385E-02$
19	$0.00000000000000000E+00$ $\pm 1.60358645640225376E-01$ $\pm 3.16564099963629832E-01$ $\pm 4.64570741375960945E-01$ $\pm 6.00545304661681022E-01$ $\pm 7.20966177335229323E-01$ $\pm 8.22714656537142995E-01$ $\pm 9.03155903614817560E-01$ $\pm 9.60208152134830467E-01$ $\pm 9.92406843843584233E-01$	$1.61054449848783696E-01$ $1.58968843393954348E-01$ $1.52766042065859667E-01$ $1.42606702173606599E-01$ $1.28753962539336389E-01$ $1.11566645547334120E-01$ $9.14900216224491517E-02$ $6.90445427376355186E-02$ $4.48142267657048059E-02$ $1.94617882297275804E-02$



Obr. VII.2 Legendrovy polynomy $P_1(x)$ až $P_5(x)$

Dodatek VII.C

Poznámky ke konvoluci

Mějme konvoluční integrál ve tvaru

$$n\mathcal{H}(t) = \int_0^t f^{(n+1)}(t-\tau)I(\tau) d\tau ,$$

kde $f(t)$ je časový průběh zdroje,

$I(t)$ je suma paprskových integrálů,

$n=0$ pro vertikální sílu uvnitř nebo na povrchu desky a

$n=1$ pro explozivní zdroj.

Tento konvoluční integrál odpovídá integrálu v rovnici (7.5), tedy pro časový průběh zdroje platí $f(0)=0$ a $f'(0)=0$. Abychom si ulehčili výpočet konvolučního integrálu, budeme nahrazovat funkci $f(t)$ posloupností obdélníků, lichoběžníků nebo kvadratických úseků.

Vertikální síla ($n=0$) :

a) $f(t)$ nahrazeno posloupností obdélníků

⇒ $f'(t)$... posloupnost Diracových impulsů

$$\Rightarrow \mathcal{H}(t) = \sum_1 \alpha_i I(t-i\Delta)$$

⇒ integrace není zapotřebí

b) $f(t)$ nahrazeno posloupností lichoběžníků

⇒ $f'(t)$... posloupnost obdélníkových impulsů

$$\Rightarrow \mathcal{H}(t) = \sum_1 \alpha_i J(t-i\Delta),$$

kde $J(t) = \int_0^t I(\tau)d\tau$

⇒ stačí jednou integrovat

Explozivní zdroj (n=1) :

a) $f(t)$ nahrazeno posloupností lichoběžníků

⇒ $f''(t)$... posloupnost Diracových impulsů

$$\Rightarrow \mathcal{H}(t) = \sum_1 \alpha_1 I(t-i\Delta)$$

⇒ integrace není zapotřebí

b) $f(t)$ nahrazeno kvadratickými úseky

⇒ $f''(t)$... posloupnost obdélníkových impulsů

$$\Rightarrow \mathcal{H}(t) = \sum_1 \alpha_1 J(t-i\Delta),$$

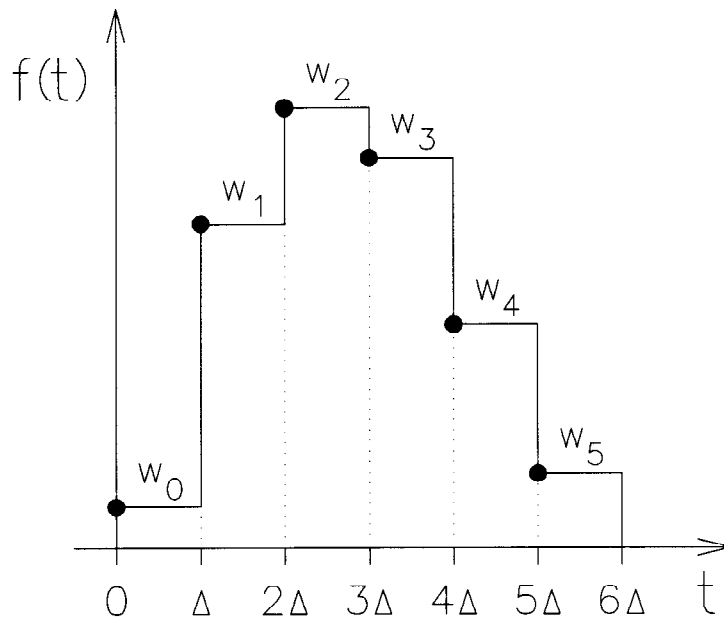
$$\text{kde } J(t) = \int_0^t I(\tau) d\tau$$

⇒ stačí jednou integrovat

Nyní podrobně rozebereme jednotlivé případy :

Aproximace posloupností obdélníků

Časový průběh zdroje $f(t)$ je aproximován posloupností obdélníků (viz obr.VII.3).



Obr.VII.3 Aproximace $f(t)$ posloupností obdélníků

$$\begin{aligned}
f(t) &= w_0 [H(t-0) - H(t-\Delta)] \\
&+ w_1 [H(t-\Delta) - H(t-2\Delta)] \\
&+ \dots \\
&+ w_5 [H(t-5\Delta) - H(t-6\Delta)] \\
&= \sum_{i=0}^5 w_i [H(t-i\Delta) - H(t-(i+1)\Delta)] , \text{ kde } w_i = f(i\Delta).
\end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned}
f'(t-\tau) &= w_0 [\delta(t-0-\tau) - \delta(t-\Delta-\tau)] \\
&+ w_1 [\delta(t-\Delta-\tau) - \delta(t-2\Delta-\tau)] \\
&+ \dots \\
&+ w_5 [\delta(t-5\Delta-\tau) - \delta(t-6\Delta-\tau)] \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} w_i [\delta(t-i\Delta-\tau) - \delta(t-(i+1)\Delta-\tau)] \\
&= w_0 \delta(t-\tau) - w_{N-1} \delta(t-N\Delta-\tau) + \sum_{i=1}^{N-1} (w_i - w_{i-1}) \delta(t-i\Delta-\tau)
\end{aligned}$$

a

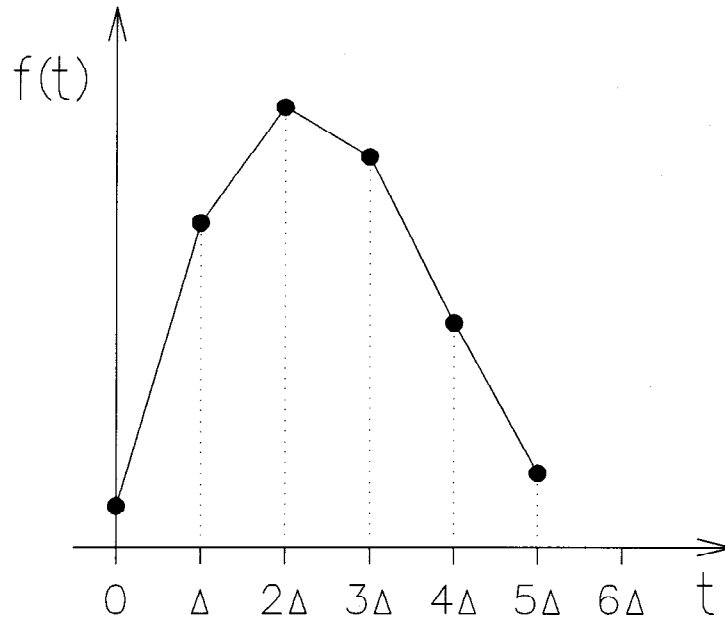
$$\mathcal{H}(t) = w_0 I(t) - w_{N-1} I(t-N\Delta) + \sum_{i=1}^{N-1} (w_i - w_{i-1}) I(t-i\Delta)$$

Zvolíme-li si w_0 a w_{N-1} (první a poslední bod) rovny nule, pak dostaneme výsledný vztah pro konvoluci (vertikální síla)

$$\mathcal{H}(t) = \sum_{i=1}^{N-1} (w_i - w_{i-1}) I(t-i\Delta) .$$

Aproximace posloupností lichoběžníků

Časový průběh zdroje $f(t)$ je aproximován posloupností lichoběžníků (viz obr.VII.4).



Obr.VII.4 Aproximace $f(t)$ posloupností lichoběžníků

$$\begin{aligned}
 f(t) &= (k_0(t-0) + q_0)[H(t-0) - H(t-\Delta)] \\
 &+ (k_1(t-\Delta) + q_1)[H(t-\Delta) - H(t-2\Delta)] \\
 &+ \dots \\
 &+ (k_4(t-4\Delta) + q_4)[H(t-4\Delta) - H(t-5\Delta)] \\
 &= \sum_{i=0}^{N-2} (k_i(t-i\Delta) + q_i)[H(t-i\Delta) - H(t-(i+1)\Delta)] ,
 \end{aligned}$$

kde $k_i = [f((i+1)\Delta) - f(i\Delta)]/\Delta$ a $q_i = f(i\Delta)$.

Tedy

$$\begin{aligned}
 f'(t-\tau) &= k_0[H(t-0-\tau) - H(t-\Delta-\tau)] + q_0\delta(t-\tau) \\
 &+ k_1[H(t-\Delta-\tau) - H(t-2\Delta-\tau)] \\
 &+ \dots \\
 &+ k_4[H(t-4\Delta-\tau) - H(t-5\Delta-\tau)] - q_5\delta(t-5\Delta-\tau)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{N-2} k_i [H(t-i\Delta-\tau) - H(t-(i+1)\Delta-\tau)] \\
&+ q_0 \delta(t-\tau) - q_{N-1} \delta(t-(N-1)\Delta-\tau)
\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(t) &= q_0 I(t) - q_{N-1} I(t-(N-1)\Delta) \\
&+ k_0 J(t) - k_{N-2} J(t-(N-1)\Delta) \\
&+ \sum_{i=1}^{N-2} (k_i - k_{i-1}) J(t-i\Delta)
\end{aligned}$$

Zvolíme-li si q_0 a q_{N-1} (první a poslední bod) rovny nule, pak dostaneme výsledný vztah pro konvoluci (vertikální síla)

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(t) &= k_0 J(t) - k_{N-2} J(t-(N-1)\Delta) \\
&+ \sum_{i=1}^{N-2} (k_i - k_{i-1}) J(t-i\Delta)
\end{aligned}$$

kde $J(t) = \int_0^t I(\tau) d\tau$.

V případě explozivního zdroje ($n=1$) musíme provést druhou derivaci $f(t)$, což vede na

$$\begin{aligned}
f''(t-\tau) &= k_0 [\delta(t-0-\tau) - \delta(t-\Delta-\tau)] \\
&+ k_1 [\delta(t-\Delta-\tau) - \delta(t-2\Delta-\tau)] \\
&+ \dots \\
&+ k_4 [\delta(t-4\Delta-\tau) - \delta(t-5\Delta-\tau)] \\
&= \sum_{i=0}^{N-2} k_i [\delta(t-i\Delta-\tau) - \delta(t-(i+1)\Delta-\tau)]
\end{aligned}$$

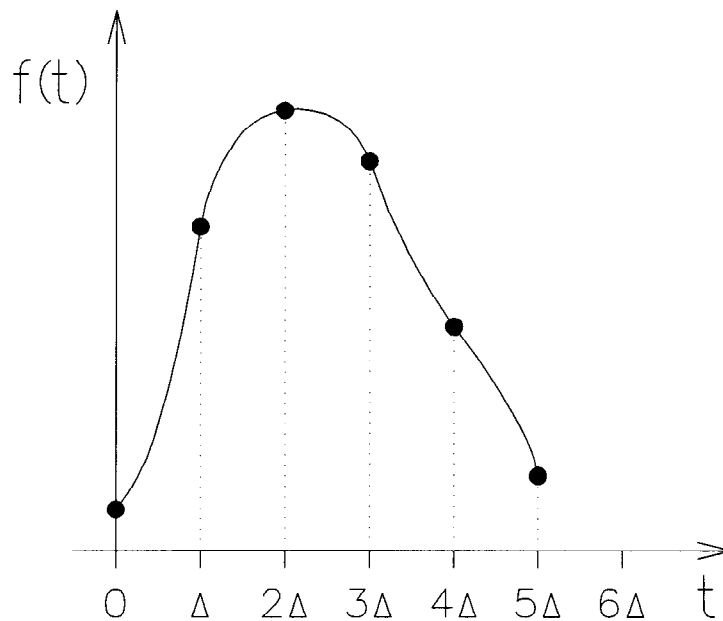
$$= k_0 \delta(t-\tau) - k_{N-2} \delta(t-(N-1)\Delta-\tau) \\ + \sum_{i=1}^{N-2} (k_i - k_{i-1}) \delta(t-i\Delta-\tau) .$$

Výsledný vztah pro konvoluci (explozivní zdroj) je potom dán výrazem

$$\mathcal{H}(t) = k_0 I(t) - k_{N-2} I(t-(N-1)\Delta) + \sum_{i=1}^{N-2} (k_i - k_{i-1}) I(t-i\Delta)$$

Aproximace posloupností kvadratických úseků

Časový průběh zdroje $f(t)$ je aproximován posloupností kvadratických úseků (viz obr.VII.5).



Obr.VII.5 Aproximace $f(t)$ posloupností kvadratických úseků

$$\begin{aligned}
f(t) &= (A_0(t-0)^2 + B_0(t-0) + C_0)[H(t-0) - H(t-\Delta)] \\
&+ (A_1(t-\Delta)^2 + B_1(t-\Delta) + C_1)[H(t-\Delta) - H(t-2\Delta)] \\
&+ \dots \\
&+ (A_4(t-4\Delta)^2 + B_4(t-4\Delta) + C_4)[H(t-4\Delta) - H(t-5\Delta)] \\
&= \sum_{i=0}^{N-2} [A_i(t-i\Delta)^2 + B_i(t-i\Delta) + C_i][H(t-i\Delta) - H(t-(i+1)\Delta)] ,
\end{aligned}$$

$$\text{kde } A_i = \frac{\frac{f((i+1)\Delta) - f(i\Delta)}{\Delta} - f'(i\Delta)}{\Delta} ,$$

$$B_i = f'(i\Delta) - 2A_i i\Delta ,$$

$$C_i = f(i\Delta) - A_i(i\Delta)^2 - B_i i\Delta . \quad [f(0) = f'(0) = 0 !!!]$$

Tedy

$$\begin{aligned}
f'(t) &= [2A_0(t-0) + B_0][H(t-0) - H(t-\Delta)] \\
&+ [2A_1(t-\Delta) + B_1][H(t-\Delta) - H(t-2\Delta)] \\
&+ \dots \\
&+ [2A_4(t-4\Delta) + B_4][H(t-4\Delta) - H(t-5\Delta)] \\
&+ C_0\delta(t) - C_5\delta(t-5\Delta) \\
&= \sum_{i=0}^{N-2} [2A_i(t-i\Delta) + B_i][H(t-i\Delta) - H(t-(i+1)\Delta)] \\
&+ C_0\delta(t) - C_{N-1}\delta(t-(N-1)\Delta)
\end{aligned}$$

Pro $f(0)=0 \Rightarrow C_0=0$ (první bod) a $f((N-1)\Delta)=0 \Rightarrow C_{N-1}=0$ (poslední bod), tedy

$$\begin{aligned}
f''(t-\tau) &= 2A_0 [H(t-0-\tau) - H(t-\Delta-\tau)] + B_0 \delta(t-\tau) \\
&+ 2A_1 [H(t-\Delta-\tau) - H(t-2\Delta-\tau)] \\
&+ \dots \\
&+ 2A_4 [H(t-4\Delta-\tau) - H(t-5\Delta-\tau)] - B_5 \delta(t-5\Delta-\tau) \\
&= \sum_{i=0}^{N-2} 2A_i [H(t-i\Delta-\tau) - H(t-(i+1)\Delta-\tau)] \\
&+ B_0 \delta(t-\tau) - B_{N-1} \delta(t-(N-1)\Delta-\tau)
\end{aligned}$$

a vztah pro konvoluci je následující (okrajové body jsou nulové)

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(t) &= B_0 I(t) - B_{N-1} I(t-(N-1)\Delta) \\
&+ 2A_0 J(t) - 2A_{N-2} J(t-(N-1)\Delta) \\
&+ \sum_{i=1}^{N-2} 2(k_i - k_{i-1}) J(t-i\Delta)
\end{aligned}$$

Zvolíme-li si B_0 a B_{N-1} (derivace v prvním a posledním bodě) rovny nule, pak dostaneme výsledný vztah pro konvoluci (explozivní zdroj)

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(t) &= 2A_0 J(t) - 2A_{N-2} J(t-(N-1)\Delta) \\
&+ \sum_{i=1}^{N-2} 2(k_i - k_{i-1}) J(t-i\Delta)
\end{aligned}$$

kde $J(t) = \int_0^t I(\tau) d\tau$.

Dodatek VII.D

Další numerické příklady

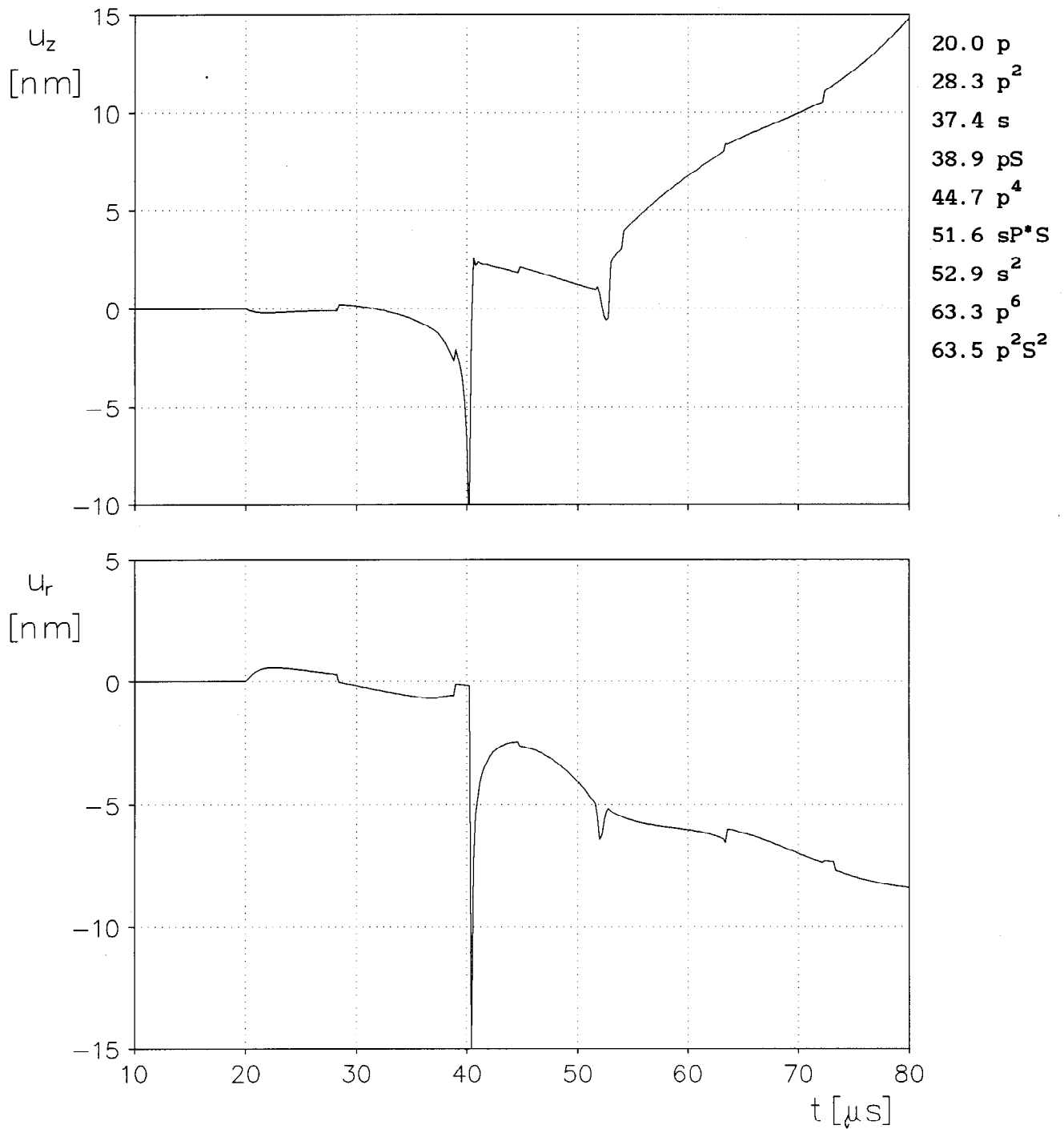
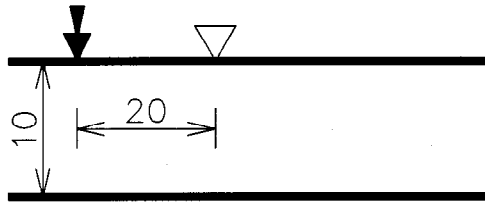
Z hlediska potřeb experimentálních měření a kalibrace snímačů akustické emise nás nejčastěji zajímají časové průběhy vertikální složky posuvu $u_z(t)$ (nejsnáze se měří) na povrchu desky, která je nejdostupnějším experimentálním tělesem (na rozdíl od dostatečně velkého poloprostoru). Při experimentech se deska budí lámáním tuhy (pen test), drcením skleněných kapilár nebo razníkem. Nejčastější jsou první dva případy, kdy se časový průběh buzení přibližuje Heavisideově skokové funkci.

Z výše uvedených důvodů byla provedena řada výpočtů, které jsou shrnuty v obr.VII.6 až obr.VII.13. Všechny tyto výpočty byly dělány pro hypotetickou desku s následujícími parametry :

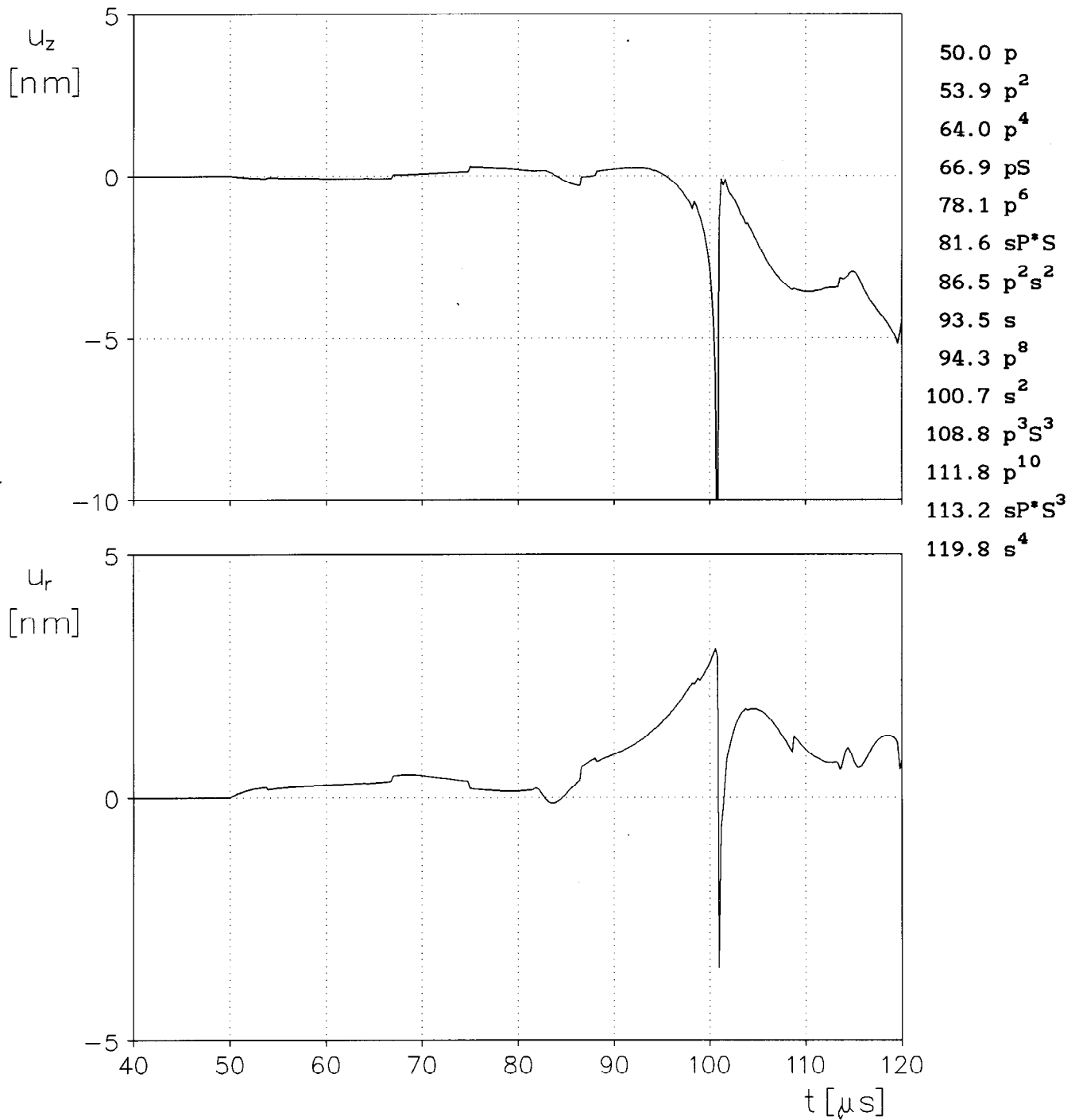
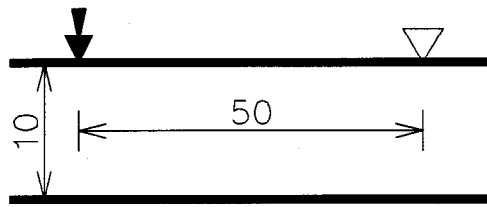
$$\begin{aligned} c &= 1 & C &= \sqrt{2/7} & \Rightarrow \text{Poissonovo číslo} &= 0.3 \\ \rho &= 7.8 \\ h &= 10 \end{aligned}$$

V případě, že rychlosti jsou v $[\text{mm}/\mu\text{s}]$, hustota v $[\text{g}/\text{cm}^3]$ a tloušťka desky v $[\text{mm}]$, jsou výsledné časy příchoďů jednotlivých paprsků v $[\mu\text{s}]$ a výchylky v $[\text{nm}]$.

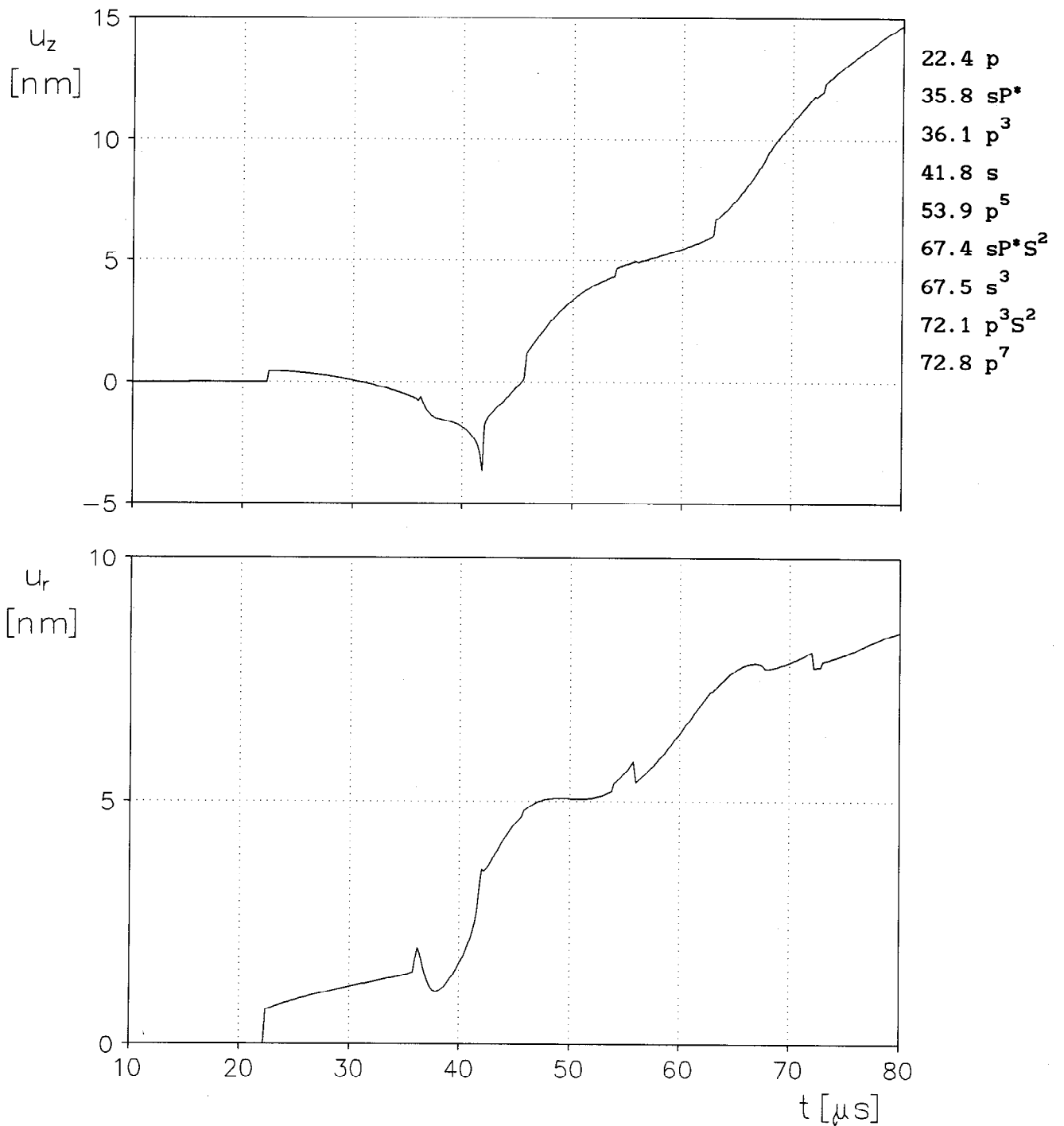
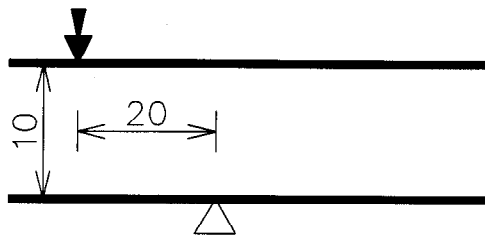
Výpočty byly provedeny pro buzení bodovou vertikální silou na povrchu desky popř. uprostřed desky. Časový průběh buzení odpovídal Heavisideově skokové funkci (z 0 na 1 N). Pro názornost byly provedeny i výpočty představující postupnou změnu místa pozorování z horního povrchu desky přes její střed k dolnímu povrchu (obr.VII.12 a 13). Z těchto obrázků je patrný dobře známý rychlý pokles amplitud Rayleighovy vlny při přechodu z horního povrchu dovnitř desky. Dále je velice zajímavé porovnat výchylky na horním a dolním povrchu desky.



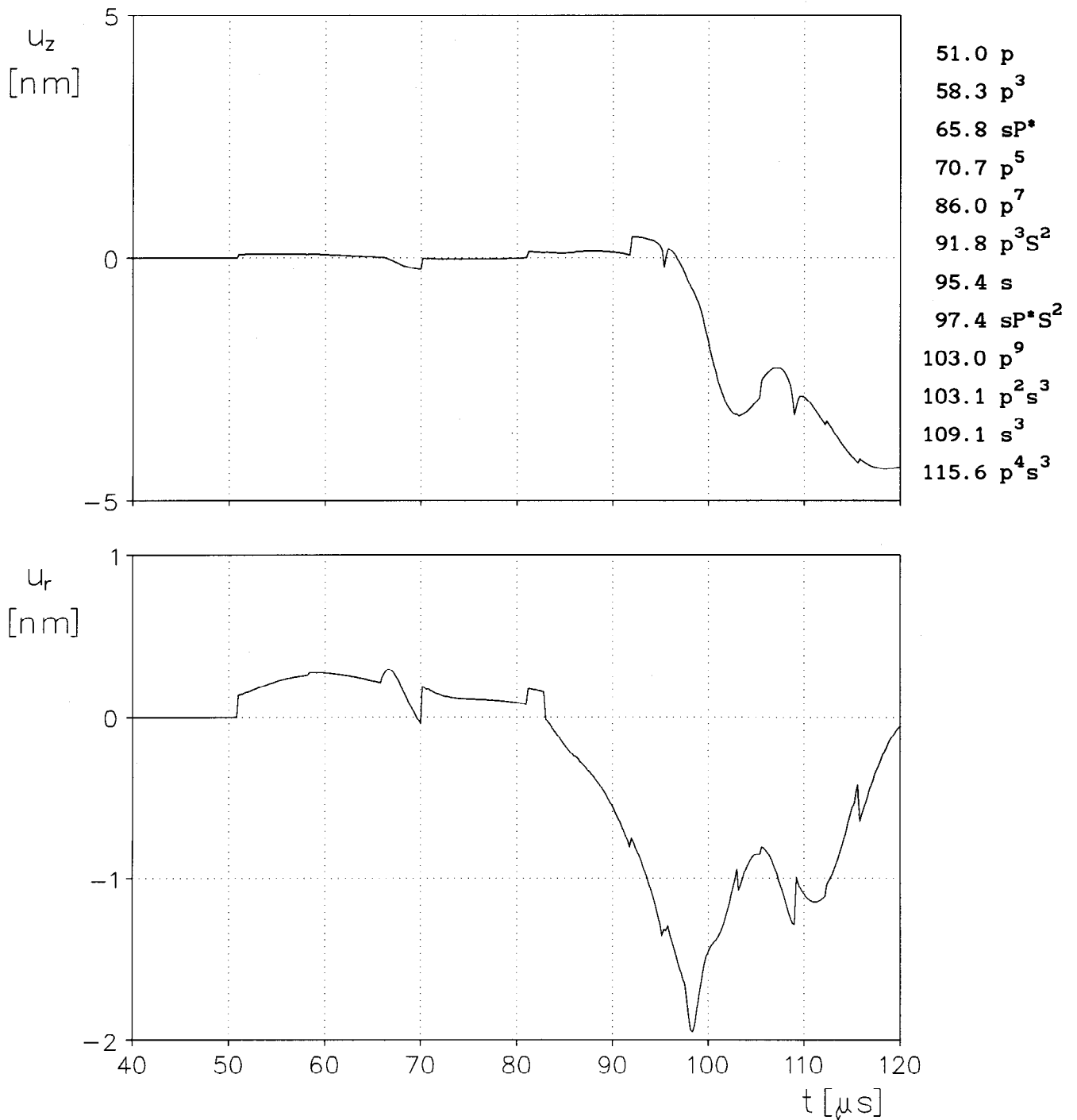
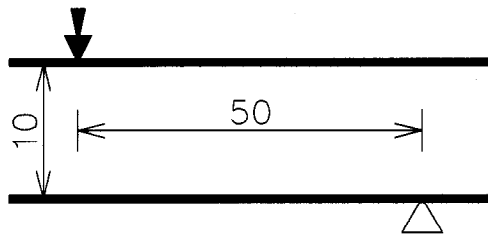
Obr.VII.6 Časová závislost posuvu u_z a u_r ;
 zdroj i přijímač na stejném povrchu ($r/h=2$);
 buzeno bodovou vertikální silou (Heaviside)



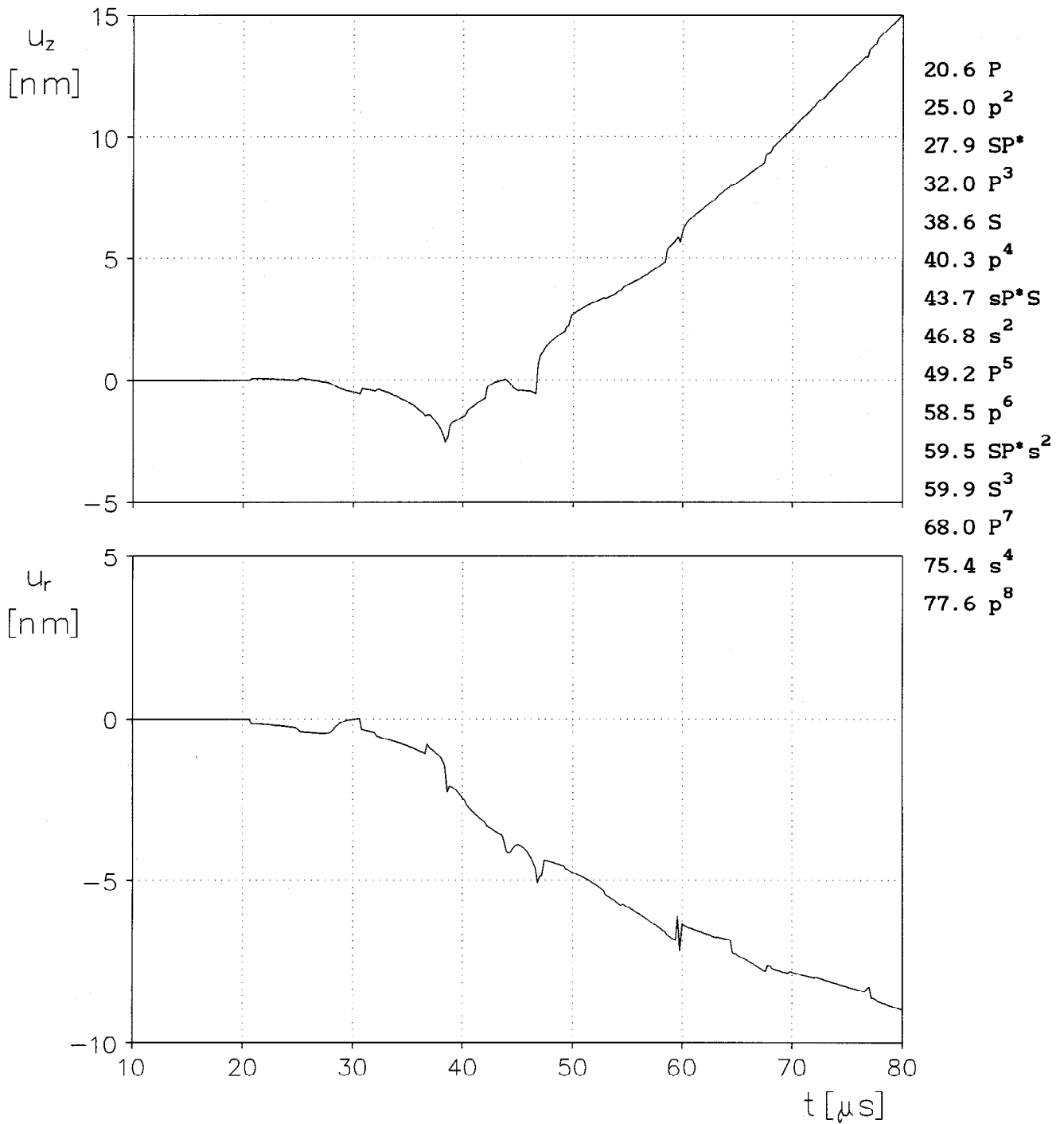
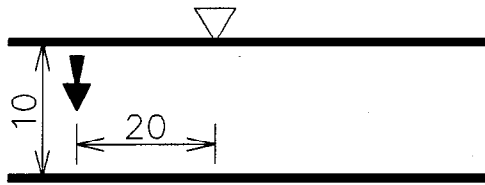
Obr.VII.7 Časová závislost posuvu u_z a u_r ;
 zdroj i přijímač na stejném povrchu ($r/h=5$);
 buzeno bodovou vertikální silou (Heaviside)



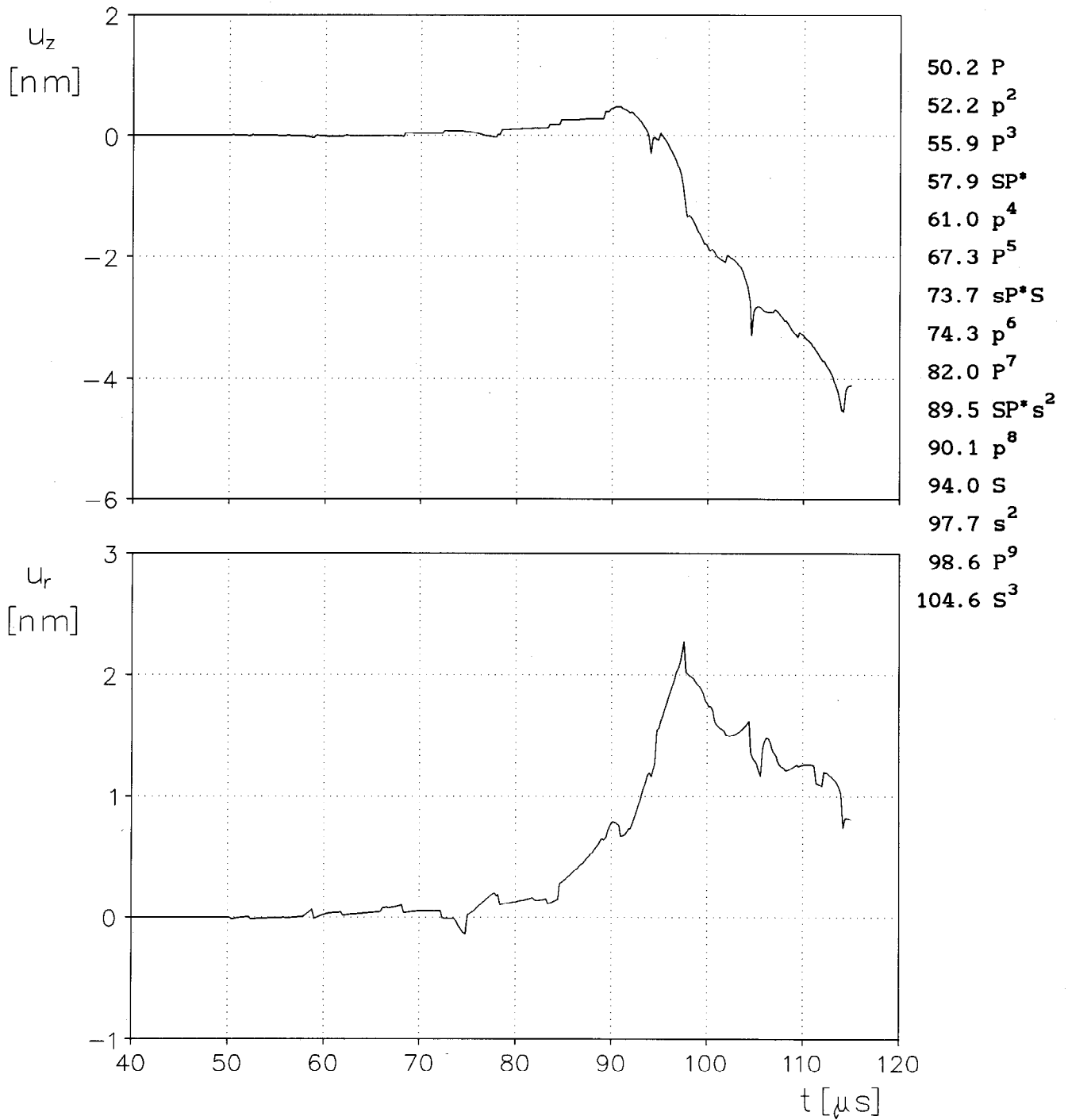
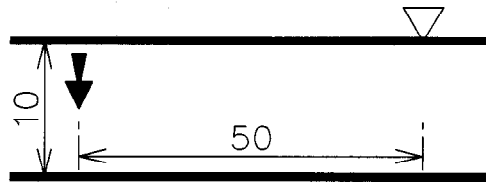
Obr.VII.8 Časová závislost posuvu u_z a u_r ;
 zdroj a přijímač na opačných stranách ($r/h=2$);
 buzeno bodovou vertikální silou (Heaviside)



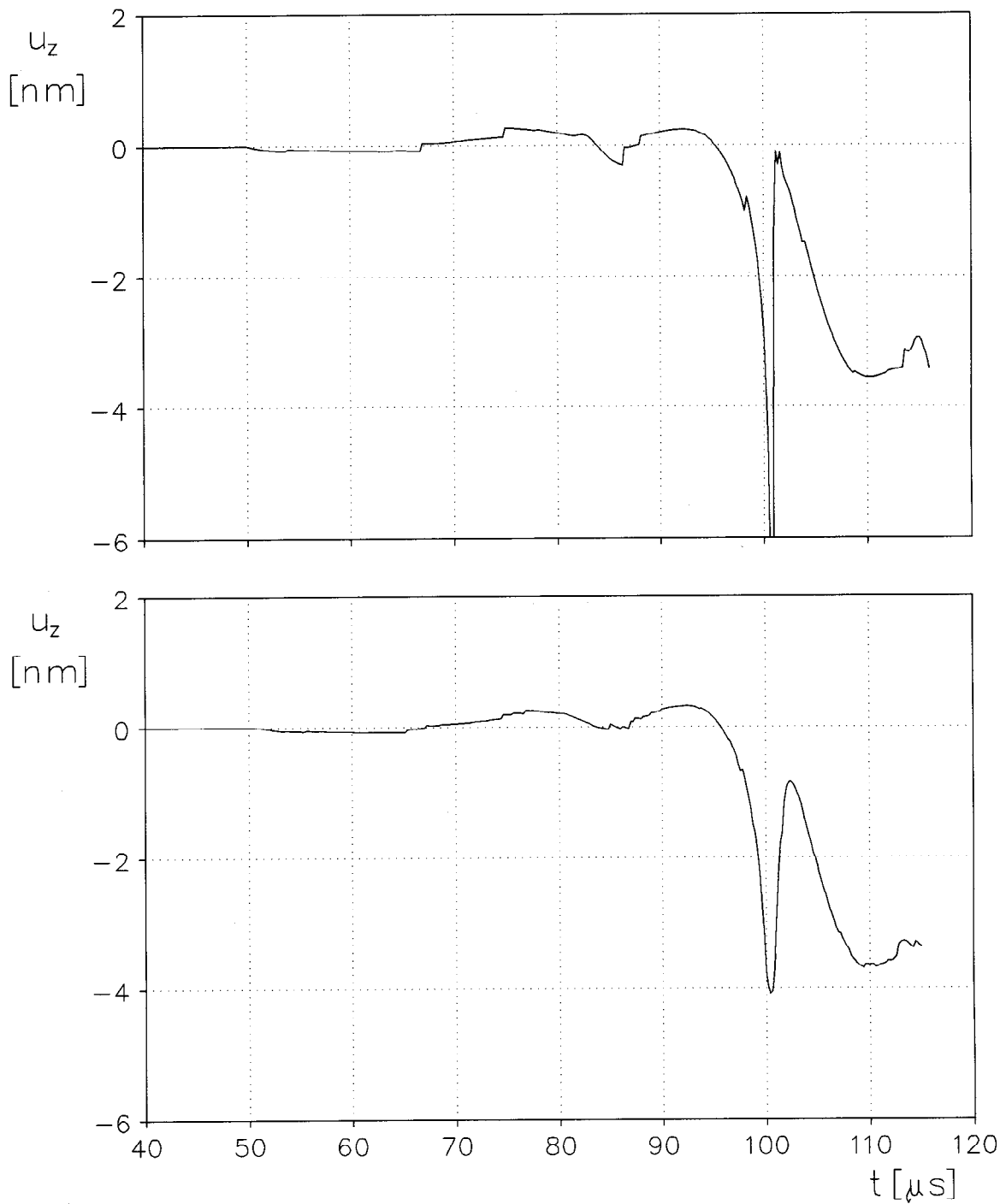
Obr.VII.9 Časová závislost posuvu u_z a u_r ; zdroj a přijímač na opačných stranách ($r/h=5$); buzeno bodovou vertikální silou (Heaviside)



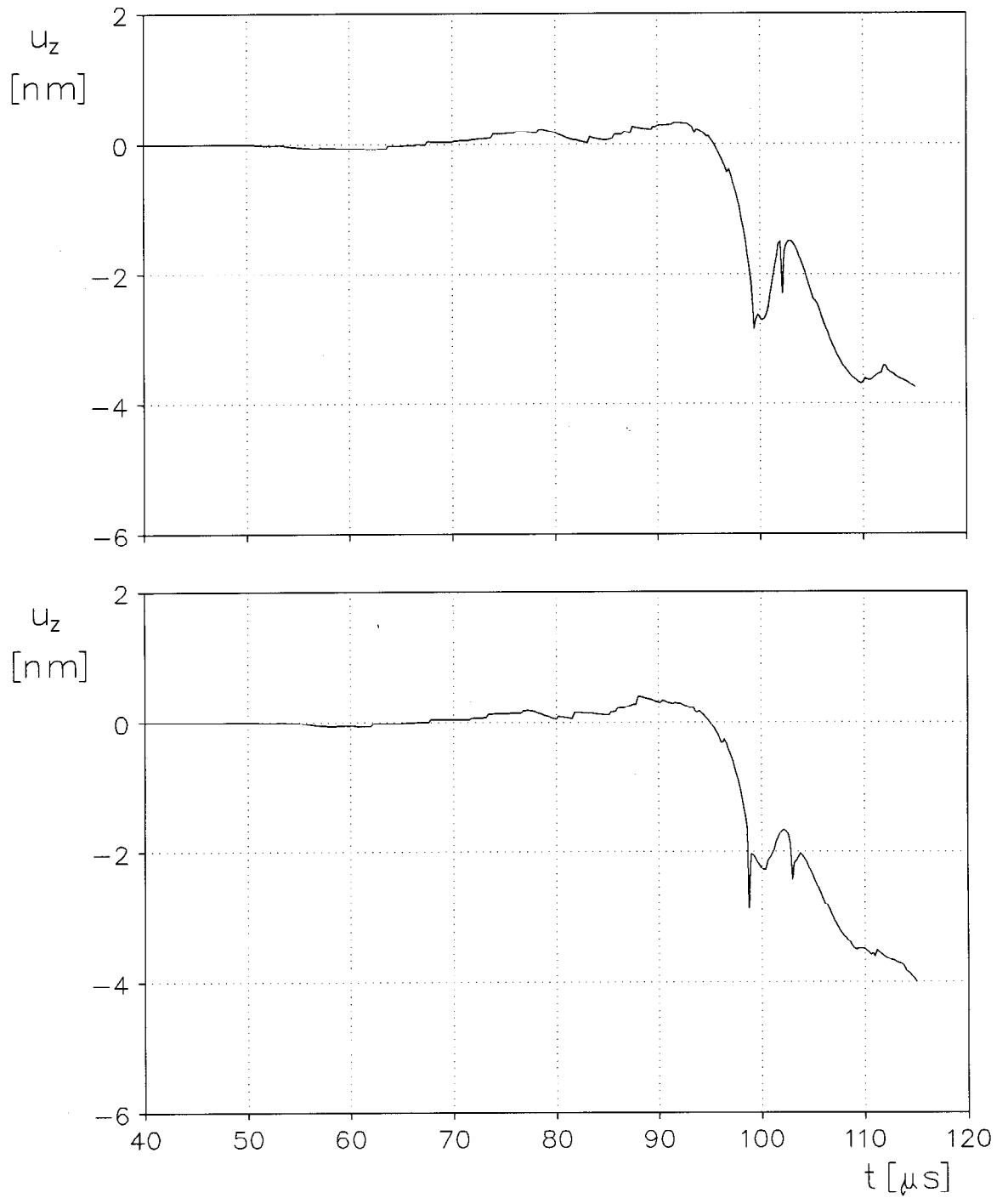
Obr.VII.10 Časová závislost posuvu u_z a u_r ;
 zdroj uvnitř, přijímač na horním povrchu ($r/h=2$);
 buzeno bodovou vertikální silou (Heaviside)



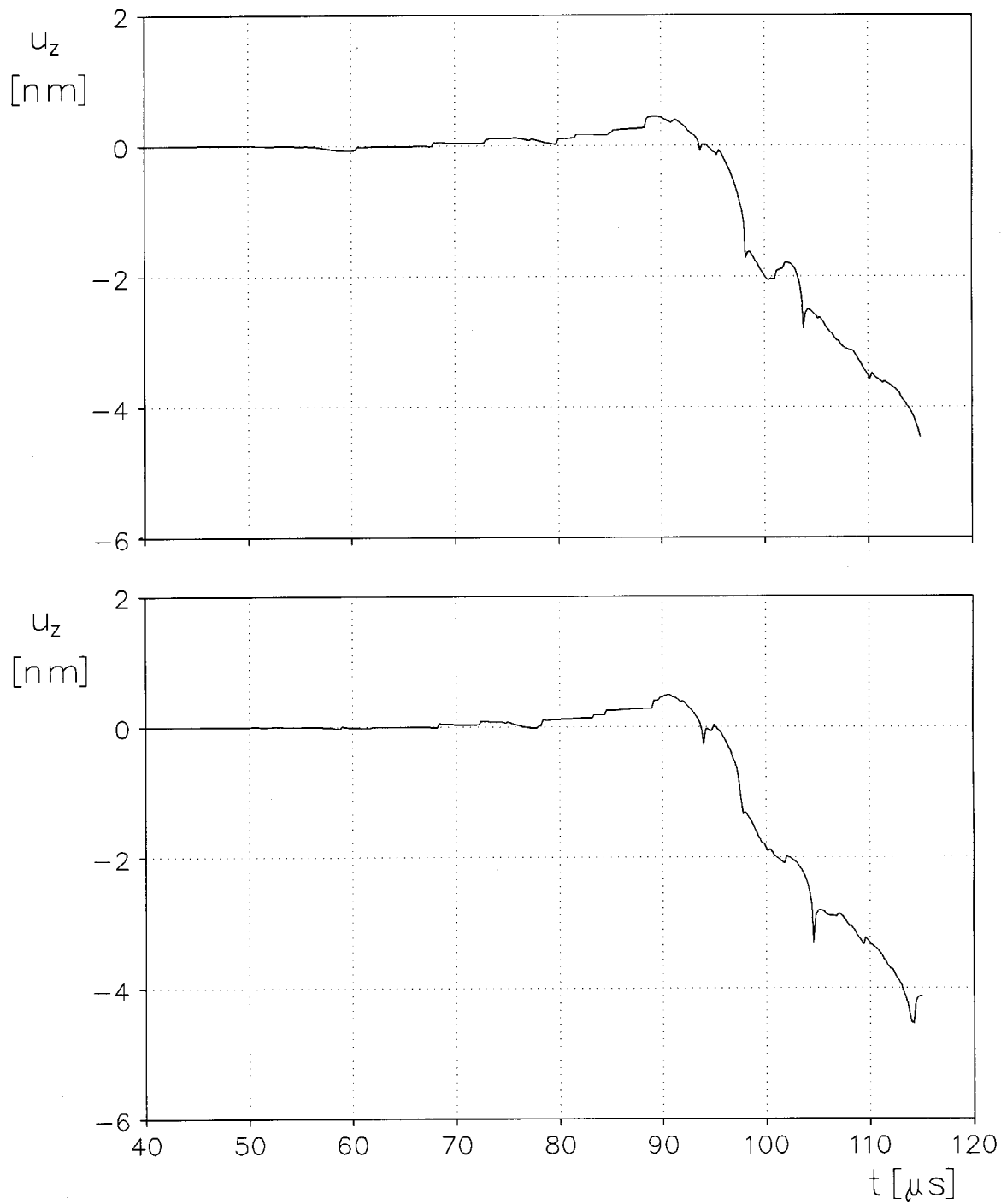
Obr.VII.11 Časová závislost posuvu u_z a u_r ;
 zdroj uvnitř, přijímač na horním povrchu ($r/h=5$);
 buzeno bodovou vertikální silou (Heaviside)



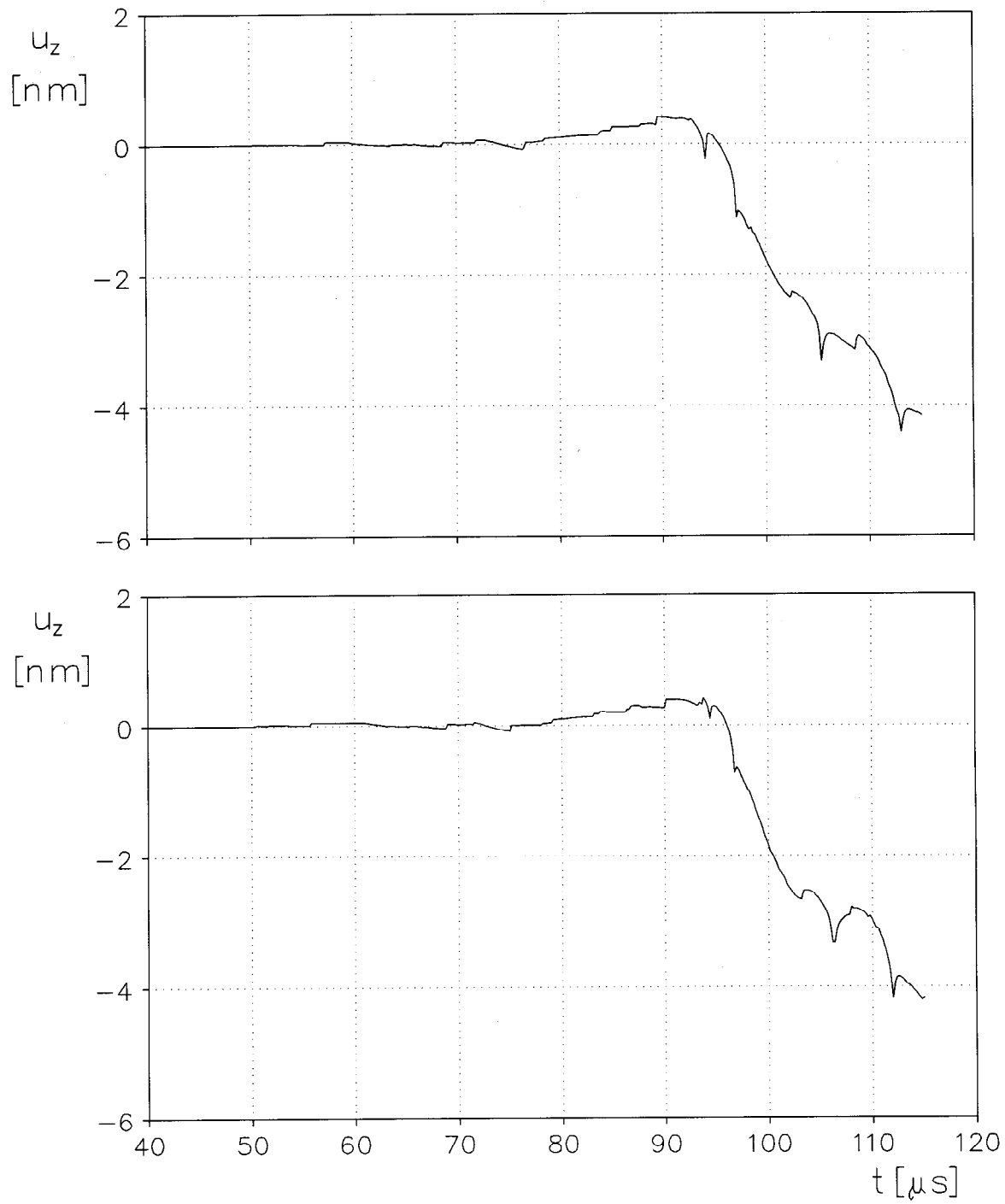
Obr. VII. 12 Časová závislost posuvu u_z ($r/h=5$);
 zdroj na horním povrchu, přijímač putuje od
 horního povrchu ($z=0$) k dolnímu ($z=10$);
 buzeno bodovou vertikální silou (Heaviside)
 a) $z=0$ - horní povrch; b) $z=1$



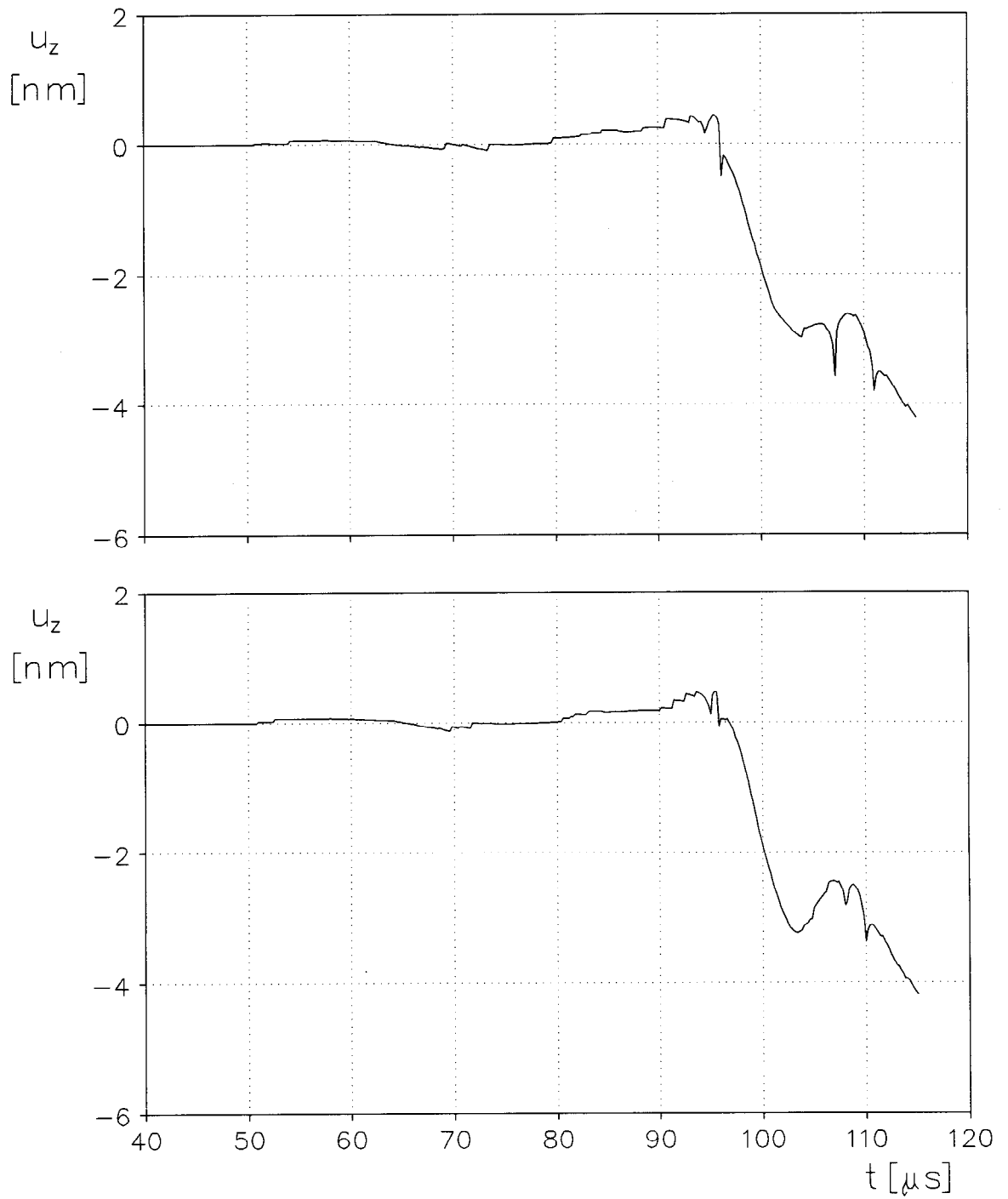
Obr. VII.12 pokračování; c) $z=2$; d) $z=3$



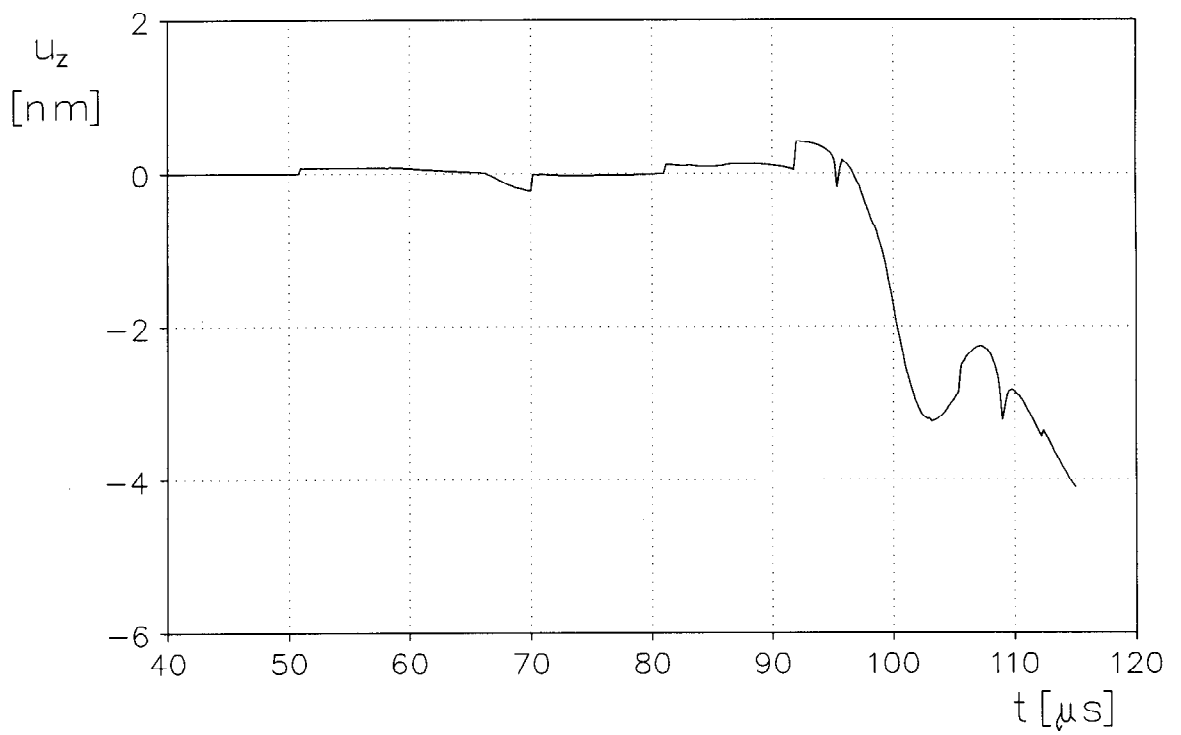
Obr. VII.12 pokračování; e) $z=4$; f) $z=5$ - střed desky



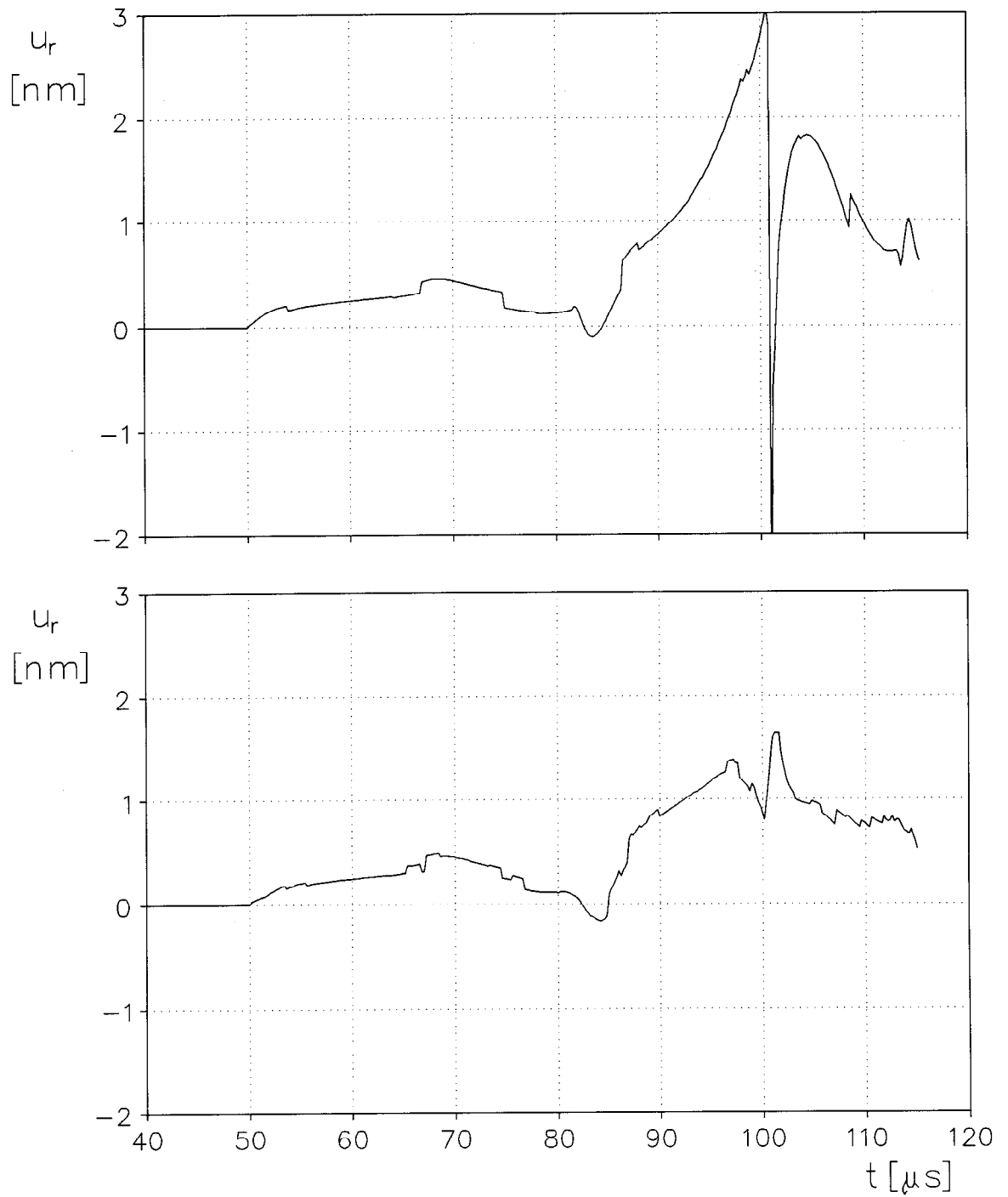
Obr. VII.12 pokračování; g) $z=6$; h) $z=7$



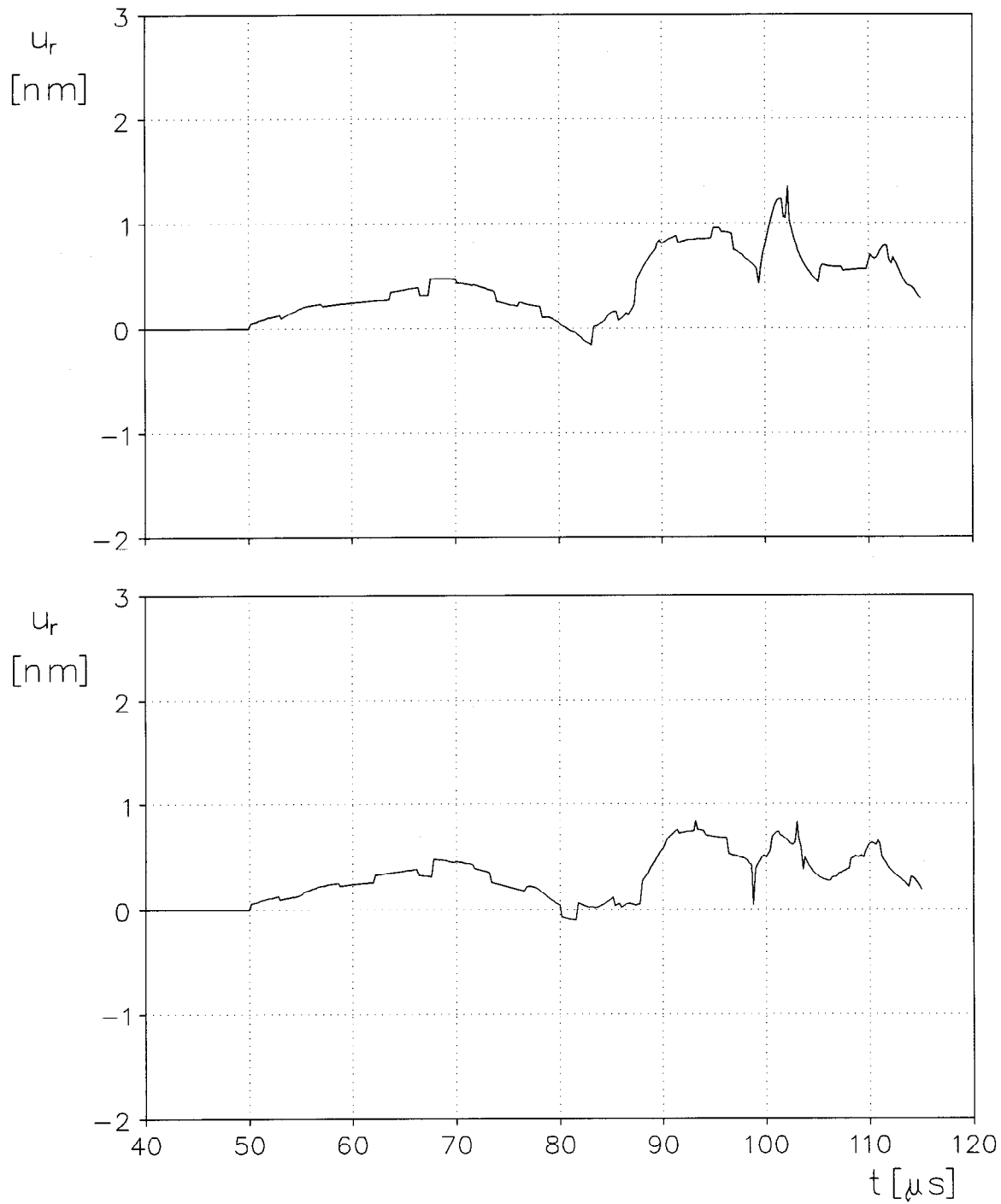
Obr. VII.12 pokračování; i) $z=8$; j) $z=9$



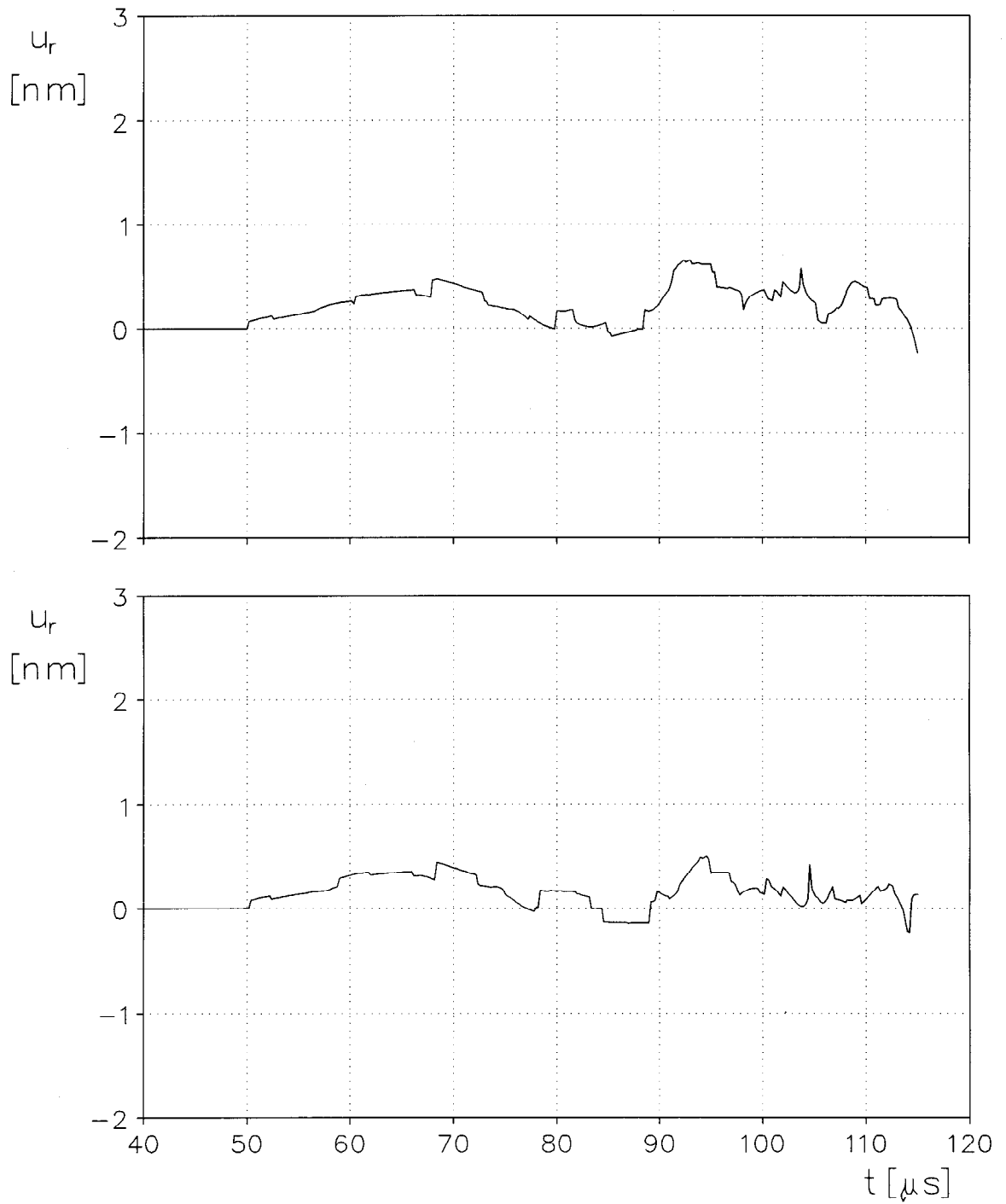
Obr. VII.12 pokračování; k) $z=10$ - dolní povrch



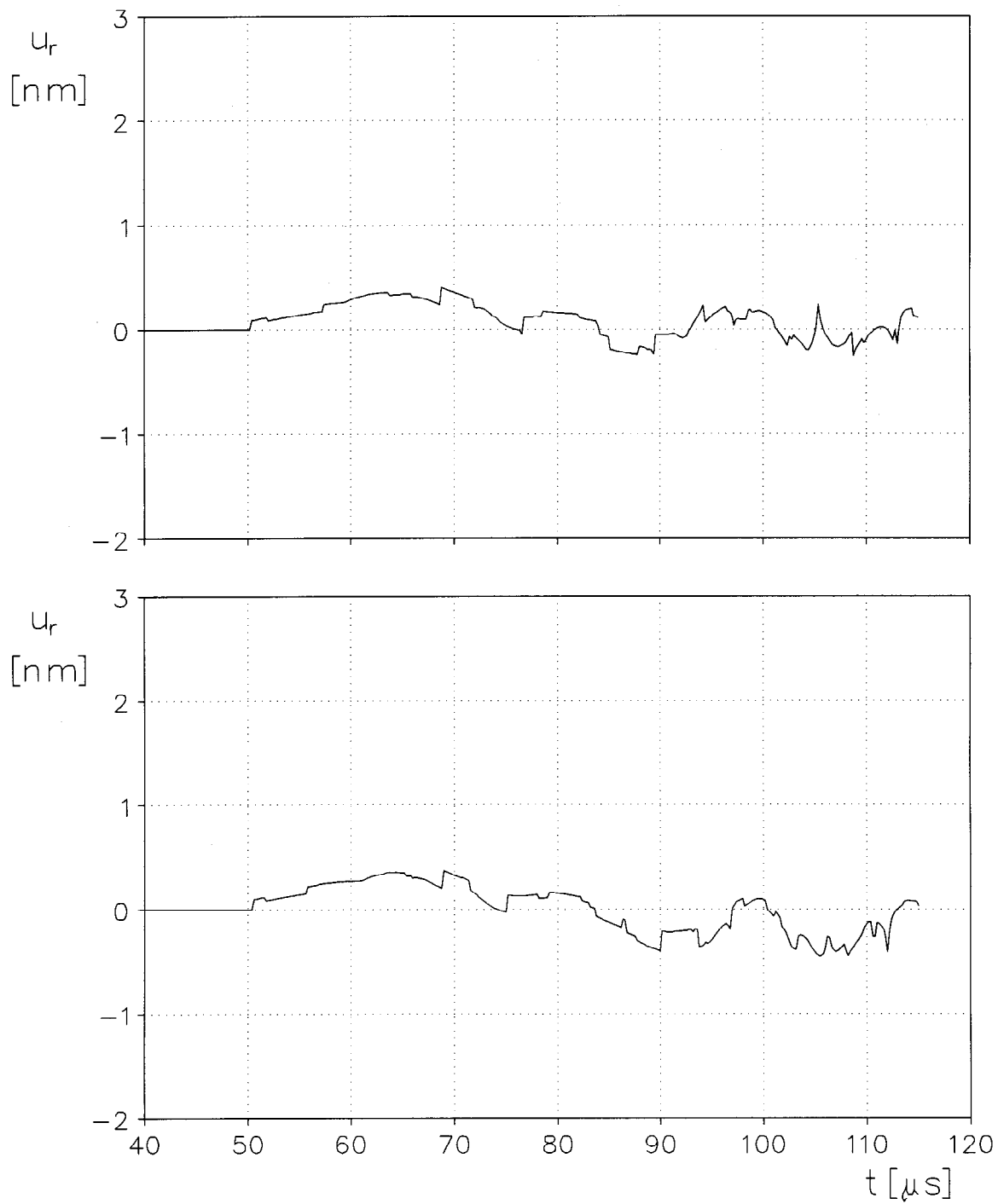
Obr.VII.13 Časová závislost posuvu u_r ($r/h=5$);
 zdroj na horním povrchu, přijímač putuje od
 horního povrchu ($z=0$) k dolnímu ($z=10$);
 buzeno bodovou vertikální silou (Heaviside)
 a) $z=0$ - horní povrch; b) $z=1$



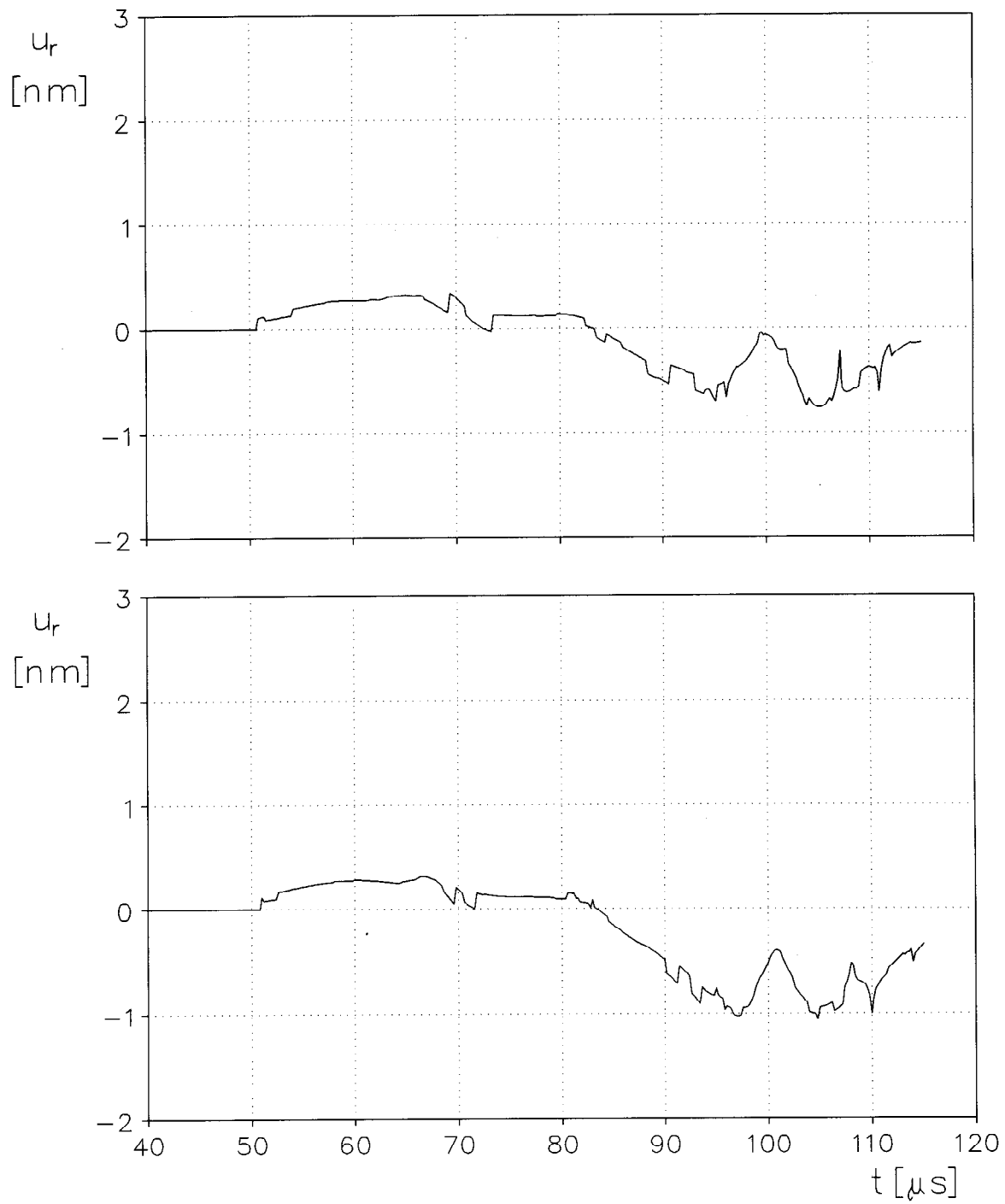
Obr. VII.13 pokračování; c) $z=2$; d) $z=3$



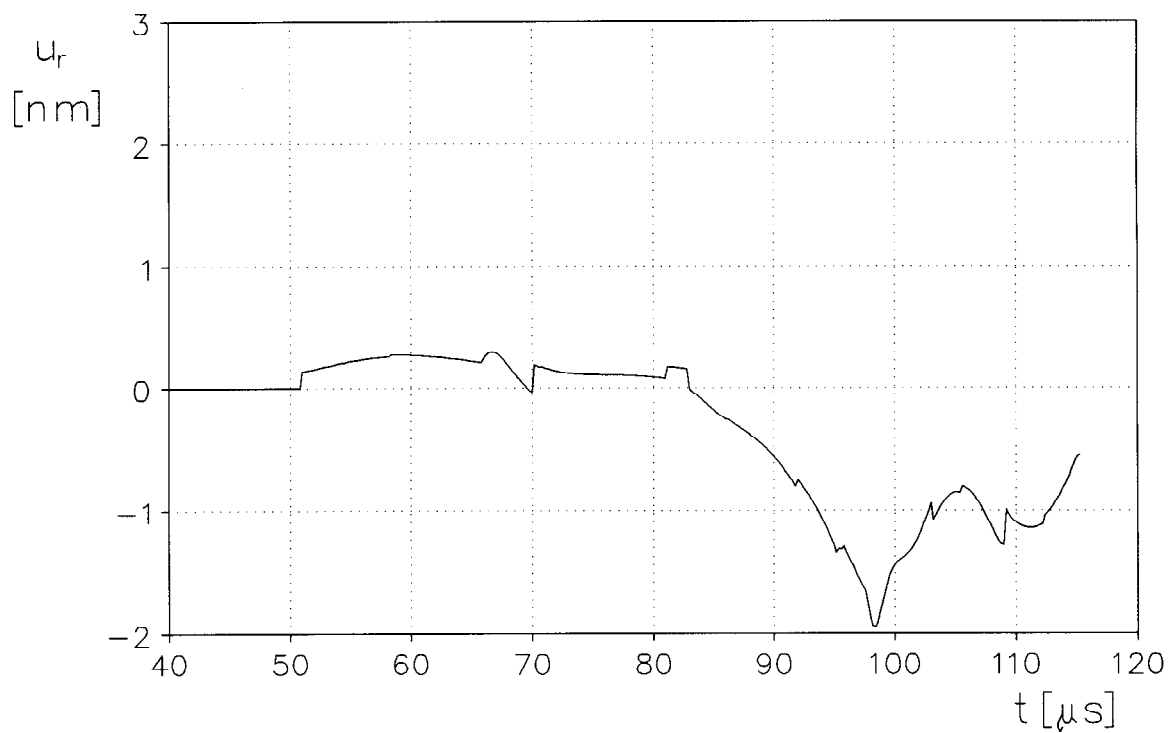
Obr.VII.13 pokračování; e) $z=4$; f) $z=5$ - střed desky



Obr. VII.13 pokračování; g) $z=6$; h) $z=7$



Obr. VII.13 pokračování; i) $z=8$; j) $z=9$



Obr. VII. 13 pokračování; k) $z=10$ - dolní povrch

Odkazy

- Abramovici, F.; Alterman, Z.:
Computations Pertaining to the Problem of Propagation
of a Seismic Pulse in a Layered Solid.
Methods Comput. Phys., Vol.4, (1965), s.349
- Achenbach, J.D.:
Wave Propagation in Elastic Solids.
North-Holland Publ., Amsterdam, (1973)
- Alterman, Z.; Karal, F.C.:
Propagation of Elastic Waves in Layered Media
by Finite Difference Methods.
Bull. Seismol. Soc. Am., Vol.58, (1968), s.367-398
- Berry, M.J.; West, G.F.:
Geophys. Monogr., Am. Geophys. Union, Vol.10, (1966), s.464
- Born, M.; Wolf, E.:
Principles of Optics.
Pergamon, Oxford, (1975)
- Bortfeld, R.:
Geophys. Prospect, Vol.10, (1962), s.519
- Brekhovskikh, L.M.:
Waves in Layered Media.
Academic Press, New York, (1960)
- Bromwich, T.J.I'A.:
Normal Coordinates in Dynamical Systems.
Proc. London. Math. Soc., Vol.15, (1916), s.401-448
- Cagniard, L.:
Reflexion et refraction des Ondes seismiques progressives.
Gauthier Villars, Paris, (1939)
[Reflection and Refraction of Progressive Seismic Waves
(anglický překlad E.A. Flinn a C.H.Dix)
McGraw-Hill, New York, (1962)]
- Chandra, U.:
Theory of Head Waves for Focal Mechanism Studies.
Bull. Seismol. Soc. Am., Vol.58, (1968), s.993-1019
- Chao, C.-C.:
Dynamical Response of an Elastic Half Space
to Tangential Surface Loadings.
J. Appl. Mech., Vol.27, (1960), s.559-567
- Chapman, C.H.:
Geophys. J. R. Astron. Soc., Vol.36, (1974), s.673

- Chapman, C.H.:
Geophys. Res. Lett., Vol.3, (1976), s.153
- Chapman, C.H.:
Exact and Approximate Generalized Ray Theory
in Vertically Inhomogeneous Media.
Geophys. J. R. Astron. Soc., Vol.46, (1976), s.201-233
- Chen, P.:
Ph.D. Thesis.
Cornell University, Ithaca, New York, (1977)
- Conte, S.D.; de Boor, C.:
Elementary Numerical Analysis.
2nd ed. McGraw-Hill, New York, (1972), s.74-84
- Dainty, A.M.; Dampney, C.N.G.:
A Comparison of Leaking Modes and Generalized Ray Theory.
Geophys. J. R. Astron. Soc., Vol.28, (1972), s.147-161
- Dampney, C.N.G.:
The Relationship between Two- and Three-Dimensional
Elastic-Wave Propagation.
Bull. Seismol. Soc. Am., Vol.61, (1971), s.1583-1588
- Dauids, N.:
Transient Analysis of Stress Wave Penetration in Plates.
J. Appl. Mech., Vol.26, (1959), s.651-660
- Dauids, N.; Lawhead, W.:
Transient Analysis of Oblique Impact on Plates.
J. Mech. Phys. Solids, Vol.13, (1965), s.199-212
- Debye, P.:
Ann. Phys., Leipzig, [4], Vol.30, (1909), s.57
- Dunkin, J.W.; Corbin, D.G.:
Bull. Seismol. Soc. Am., Vol.60, (1970), s.167
- Ewing, M.; Worzel, J.L.; Pekeris, C.L.:
Geol. Soc. Am., Vol.21, (1948), s.1
- Ewing, W.M.; Jardetzky, W.S.; Press, F.:
Elastic Waves in Layered Media.
McGraw-Hill, New York, (1957)
- Fuchs, K.:
The Transfer Function for P-Waves for a System
Consisting of a Point Source in a Layered Medium.
Bull. Seismol. Soc. Am., Vol.56, (1966), s.75-108
- Gajewski, R.R.:
Ph.D. Thesis.
Cornell University, Ithaca, New York, (1977)

- Garvin, W.W.:
Exact Transient Solution of the Buried Line Source Problem.
Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, Vol.234, (1956), s.528
- Ghosh, S.K.:
Pure Appl. Geophys., Vol.105, (1973), s.781
- Gilbert, F.; Backus, G.E.:
Geophysics, Vol.31, (1966), s.326
- Gilbert, F.; Helmberger, D.B.:
Generalized Ray Theory for a Layered Sphere.
Geophys. J. R. Astron. Soc., Vol.27, (1972), s.57-80
- Harkrider, D.G.:
Surface Waves in Multilayered Elastic Media I:
Rayleigh and Love Waves from Buried Sources
in a Multilayered Elastic Half Space.
Bull. Seismol. Soc. Am., Vol.54, (1964), s.627-679
- Harkrider, D.G.:
Bull. Seismol. Soc. Am., Vol.60, (1970), s.1937
- Harkrider, D.G.:
Potentials and Displacements for Two Theoretical
Seismic Sources.
Geophys. J. R. Astron. Soc., Vol.47, (1976), s.97-133
- Haskell, N.A.:
The Dispersion of Surface Waves on Multilayered Media.
Bull. Seismol. Soc. Am., Vol.43, (1953), s.17-34
- Helmberger, D.V.:
Bull. Seismol. Soc. Am., Vol.58, (1968), s.179
- Helmberger, D.V.:
Bull. Seismol. Soc. Am., Vol.62, (1972), s.325
- Knopoff, L.:
Surface motions of a Thick Plate.
J. Appl. Phys., Vol.29, (1958), s.661
- Knopoff, L.:
Love Waves from a Line SH Source.
V "Conference on Elastic Wave Propagation",
T.W. Spencer (ed),
J. Geophys. Res., Vol.63, (1958), s.619
- Knopoff, L.; Gilbert, F.:
J. Acoust. Soc. Am., Vol.31, (1959), s.1161
- Knopoff, L.; Gilbert, F.; Pilant, W.L.:
J. Geophys. Res., Vol.65, (1960), s.265

- Lamb, H.:
On the propagation of tremors over the surface
of an elastic solid.
Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A,
Vol.203, (1904), s.1-42
- Lapwood, E.R.:
The Disturbance Due to a Line Source
in a Semi-infinite Elastic Medium.
Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, Vol.242, (1949), s.63
- Love, A.E.H.:
A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity.
4th ed. Dover, New York, (1944)
- Mencher, A.G.:
Epicentral displacement caused by elastic waves
in an infinite slab.
J. Appl. Phys., Vol.24, (1953), s.1240
- Mooney, H.M.:
The Seismic Wave System from a Surface Impact.
Geophysics, Vol.41, (1976), s.243-265
- Morse, P.M.; Feshbach, H.:
Methods of Theoretical Physics.
McGraw-Hill, New York, (1953), s.1783-1791
- Muller, G.:
Theoretical Seismograms for some Types of point-sources
in Layered Media; Part II: Numerical Calculations.
Z. Geophys., Vol.34, (1968), s.147-162
- Muller, G.:
Theoretical Seismograms for some Types of point-sources
in Layered Media; Part III: Single Force and Dipole Sources
of Arbitrary Orientation.
Z. Geophys., Vol.35, (1969), s.347-371
- National Bureau of Standards
in "Handbook of Mathematical Functions"
(M.Abramowitz, I.A.Steguned)
US Govt-Printing Office, Washington D.C., s.358
- Newlands, M.:
The Disturbance Due to a Line Source in a Semi-infinite
Elastic Medium with a Single Surface Layer.
Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, Vol.245, (1952), s.213
- Norwood, F.R.:
Transient Response of an Elastic Plate to Loads
with Finite Characteristic Dimensions.
Int. J. Solids Struct., Vol.11, (1975), s.33-51

- Pao, Y.-H.; Gajewski, R.R.:
The Generalized Ray Theory and Transient Responses
of Layered Elastic Solids.
"Physical Acoustics" vyd. Warren P. Mason a R. N. Thurston
Academic Press, New York, Vol.13, (1977)
- Pao, Y.-H.; Ceranoglu, A.:
Propagation of Elastic Pulses and Acoustic Emission
in a Plate; Part I, II a III.
J. Appl. Mech., Vol.48, (1977), s.125-147
- Pao, Y.-H.; Kaul, R.K.:
Waves and vibrations in Isotropic and anisotropic plates.
In "R.D. Mindlin and Applied Mechanics" edited by G. Hermann
Pergamon, New York, (1974), s.149
- Pao, Y.-H.; Varatharajulu, V.:
Huygens' Principle, Radiation Conditions, and Integral
Formulas for the Scattering of Elastic Waves.
J. Acoust. Soc. Am., Vol.59, (1976), s.1361-1371
- Pao, Y.-H.; Gajewski, R.R.; Thau, S.A.:
Analysis of Ground Wave Propagation in Layered Media.
Rep. No. DASA 2697. Defense Nuclear Agency, Washington, D.C.
- Pekeris, C.L.:
Proc. Natl. Acad. Sci. U.S., Vol.26, (1940), s.443
- Pekeris, C.L.:
The Seismic Surface Pulse.
Proc. Natl. Acad. Sci. U.S., Vol.41, (1955), s.469
- Pekeris, C.L.; Longman, I.M.:
Ray-theory Solution of the Problem of Propagation
of Explosive Sound in a Layered Liquid.
J. Acoust. Soc. Am., Vol.30, (1958), s.323-328
- Pekeris, C.L.; Longman, I.M.; Lifson, H.:
Application of Ray Theory to the Problem of Long Range
Propagation of Explosive Sound in a Layered Liquid.
Bull. Seismol. Soc. Am., Vol.49, (1959), s.247
- Pekeris, C.L.; Alterman, Z.; Abramovici, F.:
Propagation of an SH-Torque Pulse in a Layered Solid.
Bull. Seismol. Soc. Am., Vol. 53, (1963), s.39-57
- Pekeris, C.L.; Alterman, Z.; Abramovici, F.; Jarosch, H.:
Propagation of a Compressional Pulse in a Layered Solid.
Rev. Geophysics, Vol.3, (1965), s.25-47
- Richards, P.G.:
Geophysics, Vol.36, (1971), s.798

- Schmuelly, M.:
Stress wave propagation in plates subjected
to a transient line source.
Int. J. Solids Struct., Vol.11, (1975), s.679-691
- Sneddon, I.N.:
Fourier Transforms.
McGraw-Hill, New York, (1951)
- Spencer, T.W.:
The Method of Generalized Reflection
and Transmission Coefficients.
Geophysics, Vol.25, (1960), s.625-641
- Spencer, T.W.:
Long-Time Response Predicted by Exact Elastic Ray Theory.
Geophysics, Vol.30, (1965), s.363-368
- Spencer, T.W.:
Refraction along a Layer.
Geophysics, Vol.30, (1965), s.369-388
- Stokes, G.G.:
Trans. Cambridge Philos. Soc., Vol.9, (1849), s.1
- Thau, S.A.; Pao, Y.-H.:
Int. J. Eng. Sci., Vol.8, (1970), s.207
- Thomson, W.T.:
J. Appl. Phys., Vol.21, (1950), s.89
- Van der Pol, B.; Bremmer, H.:
Philos. Mag., Vol.24, [7], (1937), s.141 a 824
- White, J.E.:
Seismic Waves: Radiation, Transmission, and Attenuation.
McGraw-Hill, New York, (1965)
- Wiggins, R.A.:
Body Wave Amplitude Calculations-II.
Geophys. J. R. Astron. Soc., Vol.46, (1976), s.1-10
- Wiggins, R.A.; Helmberger, D.V.:
Synthetic Seismogram Computation
by Expansion in Generalized Rays.
Geophys. J. R. Astron. Soc., Vol.37, (1974), s.73-90
- Wiggins, R.A.; Madrid, J.A.:
Body Wave Amplitude Calculations.
Geophys. J. R. Astron. Soc., Vol.37, (1974), s.423-433
- Willis, J.R.:
J. Mech. Phys. Solids, Vol.13, (1965), s.377