

# **Waveletová analýza**

## **Díl I. - Teoretický úvod**

Ing. Petr HORA, CSc.

*Západočeská univerzita*  
*Fakulta aplikovaných věd*  
*Ústav fyzikálního inženýrství*

Číslo zprávy : 140VP

Číslo kopie :

Vedoucí grantu : Ing. Petr HORA, CSc.

Ředitel ústavu : Doc. Ing. Miroslav BALDA, DrSc.

#### ROZDĚLOVNÍK :

Výtisk číslo :

1. archivní výtisk
2. knihovna ÚFY FAV ZČU
3. Doc. Ing. Miroslav BALDA, DrSc. ÚFY FAV ZČU
4. Ing. Michal LANDA, CSc. ÚT AV ČR
5. Ing. Zdeněk PŘEVOROVSKÝ, CSc. ÚT AV ČR
6. Ing. Jiří PÁTEK ÚFY FAV ZČU
7. Ing. Petr HORA, CSc. ÚFY FAV ZČU

# Obsah

<b>Seznam obrázků</b>	<b>4</b>
<b>Seznam použitých symbolů</b>	<b>5</b>
<b>1 ÚVOD</b>	<b>6</b>
<b>2 DISKRÉTNÍ WAVELETOVÁ ANALÝZA</b>	<b>7</b>
2.1 Základní myšlenky . . . . .	7
2.2 Dilatační rovnice . . . . .	11
2.3 Dilatační wavelety . . . . .	13
2.4 Vlastnosti waveletových koeficientů . . . . .	18
2.4.1 Zachování plochy . . . . .	18
2.4.2 Přesnost . . . . .	19
2.4.3 Podmínky ortogonality pro matici $M_r$ . . . . .	23
2.4.4 Důsledky těchto podmínek . . . . .	25
2.4.5 Shrnutí ortogonálních vlastností . . . . .	28
2.4.6 Souhrn waveletových podmínek . . . . .	30
2.5 Periodické waveletové transformace . . . . .	34
2.6 Diskrétní waveletové transformace . . . . .	38
2.7 Vlastnosti DWT . . . . .	51
2.8 Zobrazení středních kvadratických hodnot . . . . .	60
2.9 Konvoluce pomocí waveletů . . . . .	66
2.10 Dvourozměrné waveletové transformace . . . . .	68
2.11 Harmonické wavelety . . . . .	71
2.12 Diskrétní harmonická waveletová transformace . . . . .	78
<b>3 ZÁVĚR</b>	<b>83</b>
<b>4 DODATEK</b>	<b>84</b>
<b>5 PROBLÉMY</b>	<b>102</b>
<b>Literatura</b>	<b>107</b>

# Seznam obrázků

2.1	Analýza obdélníkového signálu $f(r)$ , $r$ od 1 do 128, waveletem D4. . . . .	8
2.2	Rekonstrukce obdélníkového signálu $f(r)$ z jeho waveletových složek. . . . .	9
2.3	Wavelet D4 v úrovni 3 použitý v obr. 2.1. . . . .	10
2.4	Sestrojení škálovací funkce D4 iterací z obdélníkového signálu. . . . .	13
2.5	Škálovací funkce D4 vypočtena pro $3 \times 2^{12}$ bodů rekursivní metodou (Problém 2). . . . .	14
2.6	Wavelet D4 podle vztahu (2.5). . . . .	15
2.7	Wavelet D4 vypočtený iterací. . . . .	17
2.8	Rekonstrukce sinusové vlny z jejích waveletových složek. . . . .	21
2.9	Haarovy wavelety s jednotkovou amplitudou. . . . .	34
2.10	Generování waveletu $W(2x)$ z jednotkového signálu. . . . .	43
2.11	Příklad používající Haarův wavelet k demonstraci práce Mallatova algoritmu. . . . .	51
2.12	Wavelety $W(16x)$ s 2, 8, 14 a 20 koeficienty pro posloupnost délky 512 vzorků. . . . .	53
2.13	Část waveletu $W(16x)$ (D20) pro posloupnost délky 8192 vzorků. . . . .	54
2.14	Wavelety $W(16x - k)$ s 2, 8, 14 a 20 koeficienty. . . . .	55
2.15	Čtyři simultánní záznamy vibrací a jejich waveletové transformace (D20). . . . .	56
2.16	Rekonstruované signály z waveletu úrovně 4 a 5. . . . .	57
2.17	Rekonstruované signály z waveletu úrovně 8 a 9. . . . .	58
2.18	Síť pro vykreslení waveletové amplitudy (čtverců amplitudy). . . . .	62
2.19	Dva signály se stejnou spektrální hustotou. . . . .	63
2.20	Mapa středních kvadratických hodnot pro dva signály z obr. 2.19. . . . .	64
2.21	Dvourozměrná funkce $\mathbf{F}(128 \times 128)$ reprezentující vystouplé písmeno D. . . . .	71
2.22	Postupná rekonstrukce funkce $\mathbf{F}(128 \times 128)$ . . . . .	72
2.23	Amplitudy Fourierových transformací harmonických waveletů různých úrovní. . . . .	74
2.24	Reálná část (a) a imaginární část (b) harmonického waveletu. . . . .	75
2.25	Reálná část (a) a imaginární část (b) harmonické škálovací funkce. . . . .	76
2.26	FFT algoritmus pro výpočet harmonické waveletové transformace. . . . .	80
2.27	Uspořádání diskrétních aproximací $F_k$ Fourierovy transformace $F(\omega)$ . . . . .	81

# Seznam použitých symbolů

$c_i$	i-tý waveletový koeficient
$c_{i,k}$	waveletové amplitudy
$D_n$	n-tý ortogonální wavelet podle prof. Daubechies
$i$	imaginární jednotka
$\mathbf{I}$	jednotková matice
$t$	čas
$T$	perioda
$W(x)$	waveletová funkce
$\alpha$	škálovací koeficient
$\phi(x)$	škálovací funkce
$\omega$	úhlová frekvence

Má-li symbol více významů, je jeho lokální význam podrobně vysvětlen v příslušné části textu.

Pojmy „škála“ a „úroveň“, které se vyskytují v textu, jsou totožné.

# 1 ÚVOD

Tato zpráva vznikla na základě podpory grantu GA ČR č. 101/94/0971 *Nové metody vyhodnocování signálů akustické emise* (řešitel Ing. Petr HORA, CSc.). Tento grant se řeší v ÚFY FAV ZČU v Plzni a ÚT AV ČR v Praze. V rámci výše uvedeného grantu se zájem soustřeďuje především do oblasti komprese signálů akustické emise a detekce jejich příchodů.

Waveletové transformace (WT) patří mezi rychle se rozvíjející metody v řadě oborů, čistou matematikou počínaje a inženýrskými aplikačními obory konče. Mezi nejpoužívanější aplikace patří: detekce nespojitostí (využívá především vynikající lokalizační vlastnosti WT), komprese signálů (audio signály, video signály, statické obrazy) a rychlé algoritmy pro maticové operace.

Pro tyto aplikace má WT řadu předností. Navzdory tomu není v tuzemské knižní produkci žádný titul, který by se o tomto progresivním prostředku analýzy signálů byť jen zmínil. Rozhodli jsme se proto tuto mezeru, i když pouze pro omezený okruh uživatelů, vyplnit. Waveletové analýze signálů akustické emise budeme věnovat několik výzkumných zpráv. Tato zpráva, jako první z řady, podává teoretický úvod do waveletové analýzy. Při studiu waveletové analýzy se nám dostala do rukou kniha 'An introduction to random vibrations, spectral and wavelet analysis' od profesora D.E.Newlanda [NEW94c]. Jelikož je tato kniha výborně napsaná, rozhodli jsme se ji použít, resp. její kapitolu 'Discrete wavelet analysis', k napsání teoretického úvodu k waveletům.

Tato zpráva je určena výhradně pro vnitřní potřebu Ústavu fyzikálního inženýrství Fakulty aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni.

V Plzni 13. června 1996

.....  
Ing. Petr HORA, CSc.

## 2 DISKRÉTNÍ WAVELETOVÁ ANALÝZA

Nevýhoda Fourierovy analýzy spočívá v tom, že informace o frekvenci může být získána pouze pro úplný signál  $f(t)$ . Poněvadž integrál v rovnici Fourierovy transformace má meze od  $-\infty$  do  $+\infty$ , informace, kterou takto dostaneme, vzniká z průměru přes celou délku signálu. Jestliže se v nějakém místě signálu  $f(t)$  objeví lokální oscilace představující zvláštní znak signálu, přispěje tato oscilace k vypočtené Fourierově transformaci  $F(\omega)$ , ale její pozice na časové ose bude ztracena. Neexistuje žádný způsob jak zjistit, ze kterých částí signálu je odvozena hodnota  $F(\omega)$  pro dané  $\omega$ . Tuto nevýhodu odstraňuje *waveletová analýza* (*wavelet analysis*), která poskytuje alternativní způsob rozdělení signálu do jeho základních částí. Původní podnět pro wavelety přišel z oblasti analýzy seismogramů (Goupillaud a spol. [GOUP84]), ale waveletová analýza se už nalezne i ve významných aplikacích zpracování řeči a obrazu a je nyní všeobecně považována za významný nástroj v analýze signálu.

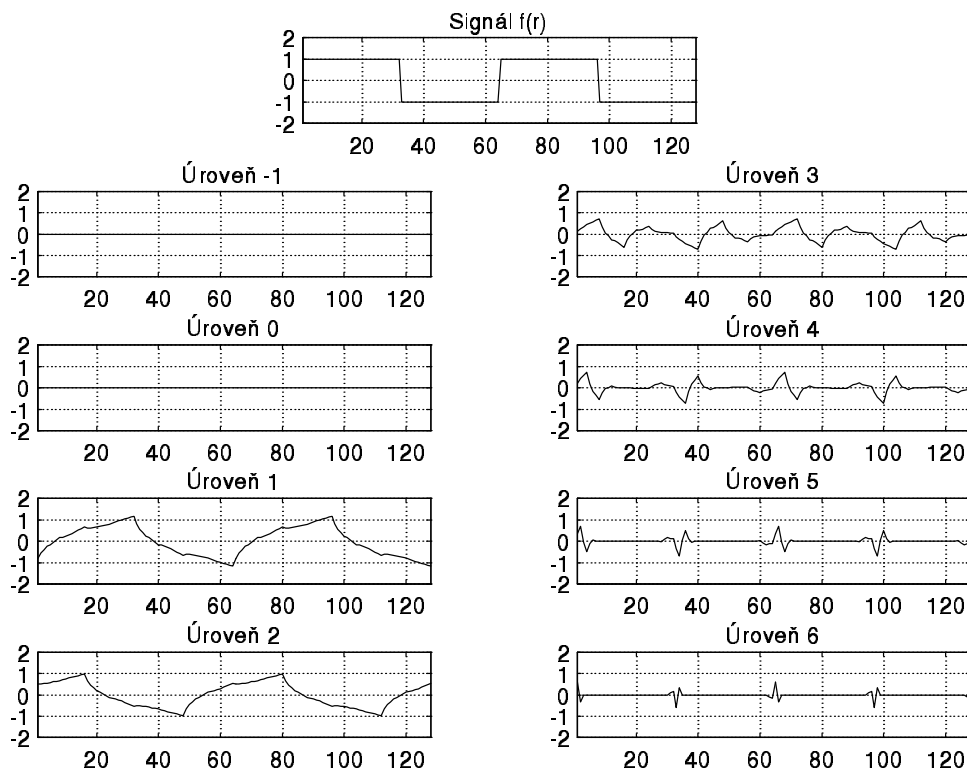
### 2.1 Základní myšlenky

Abychom ilustrovali, jak rozklad do waveletů pracuje, je na obr. 2.1 znázorněn rozklad signálu do svých waveletových složek. Použit je obdélníkový signál, jehož dvě periody jsou zobrazeny v horní části obrázku. Pod ním je osm samostatných signálů, které byly získány rozkladem obdélníkového signálu do waveletových složek. Z důvodů, které se stanou zřejmé později v této kapitole, každá složka se nazývá *úroveň* (*level*) a úrovně jsou číslovány od -1 nahoru. V tomto příkladu jsou úrovně -1 a 0 nulové, ale obecně to tak být nemusí.

Sečtením jednotlivých waveletových úrovní je získán původní signál, což je znázorněno na obr. 2.2. V levém horním rohu je samotná úroveň -1, na následujících průbězích jsou pak výsledky po přičtení další úrovně, až konečně v pravém dolním rohu je zrestaurovaný původní signál.

V celé této kapitole předpokládáme ekvidistantně vzorkované signály. Na obr. 2.1 obdélníkový signál  $f(r)$  pokrývá rozsah  $r$  od 1 do 128. Stejně jako když u diskrétní Fourierovy transformace délka posloupnosti  $N$  analyzovaného signálu určuje, kolik samostatných frekvencí může být reprezentováno, tak u diskrétní waveletové transformace délka posloupnosti určuje, kolik waveletových úrovní existuje. Vidíme, že pro  $N = 2^n$  existuje  $n + 1$  waveletových úrovní, takže pro  $N = 128 = 2^7$  existuje osm waveletových úrovní (viz obr. 2.1).

Tvary složek dekomponovaného signálu závisí na tvaru *analyzujícího waveletu* (*analysing wavelet*). Analyzujících waveletů může být nekonečně mnoho, ale pouze malá podmnožina z nich splňuje podmínky, které jsou nezbytné, pokud mají wavelety poskytovat přesnou dekompozici a být navzájem



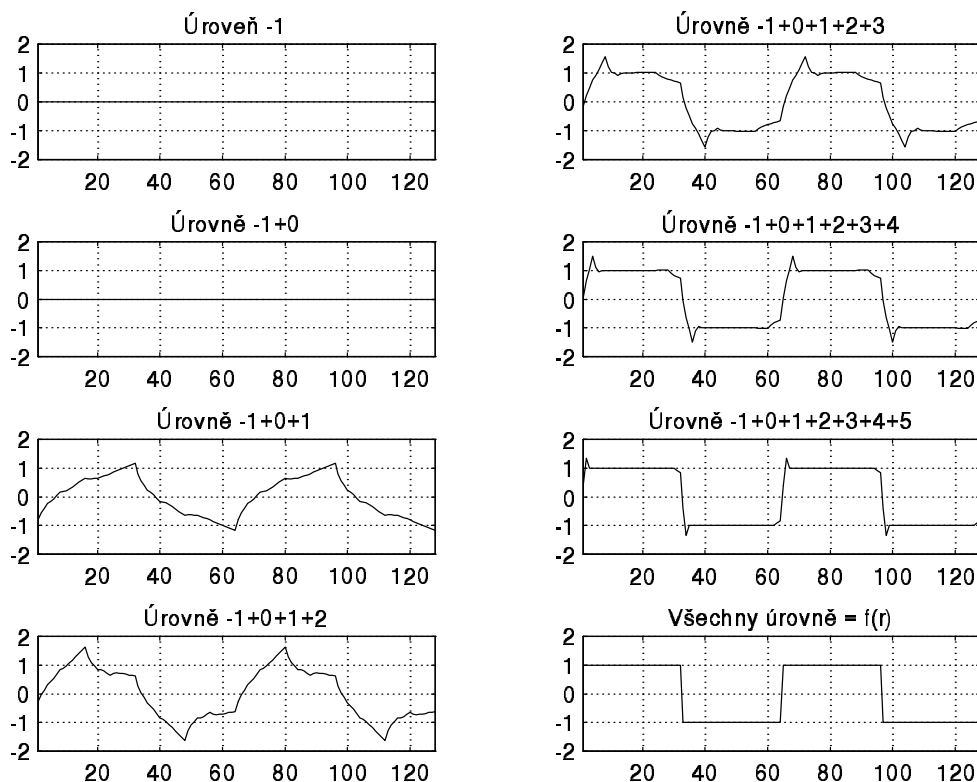
Obr. 2.1: Analýza obdélníkového signálu  $f(r)$ ,  $r$  od 1 do 128, waveletem D4.

ortogonální. Existuje vysoce efektivní numerický algoritmus pro výpočet waveletové transformace, který dělá pro waveletovou analýzu to, co algoritmus rychlé Fourierovy transformace (FFT) dělá pro Fourierovu analýzu. Tento algoritmus pracuje pouze s ortogonálními wavelety. Z tohoto důvodu se budeme v této kapitole zabývat pouze ortogonálními wavelety, jejich definováním a vlastnostmi. Když si vybereme, jaký wavelet budeme používat, tvoří tento wavelet báze funkce, do kterých může být signál  $f$  rozložen. Koukneme-li se na to z jiné strany, tak analyzující wavelet určuje tvar stavebních bloků, ze kterých je signál  $f$  zkonstruován.

Na obr. 2.1 a 2.2 byl používán wavelet D4 (pojmenování bude vysvětleno později) a tvar tohoto waveletu si můžete prohlédnout na obr. 2.3 nahoře. Wavelet je vykreslen v měřítku úrovně 3 z obr. 2.1. Všimněte si, že wavelet v tomto měřítku zaujímá pouze část délky analyzovaného signálu. Aby pokryl plnou délku, musí se přidat dodatečné wavelety; v úrovni 3 existuje podél horizontální osy  $2^3 = 8$  waveletů v ekvidistantně rozmístěných intervalech. Každý je posunut vzhledem ke svému sousedu o  $128/8 = 16$  vzorků. Tři sousední wavelety jsou znázorněny ve druhém pohledu na obr. 2.3 a jejich součet ve třetím pohledu. Poslední pohled na obr. 2.3 ukazuje součet všech osmi waveletů v tomto měřítku.

V následujícím vyšším měřítku, což odpovídá úrovni 4 na obr. 2.1, existuje 16 waveletů posunutých o 8 vzorků; pro úroveň 5 existuje 32 waveletů posunutých o 4 vzorky; v nejvyšší úrovni 6 existuje 64 waveletů posunutých o 2 vzorky. Zmenšujeme-li měřítko, úroveň 2 má 4 wavelety posunuté o 32 vzorků; úroveň 1 má 2 wavelety posunuté o 64 vzorků; úroveň 0 má jeden wavelet a úroveň -1



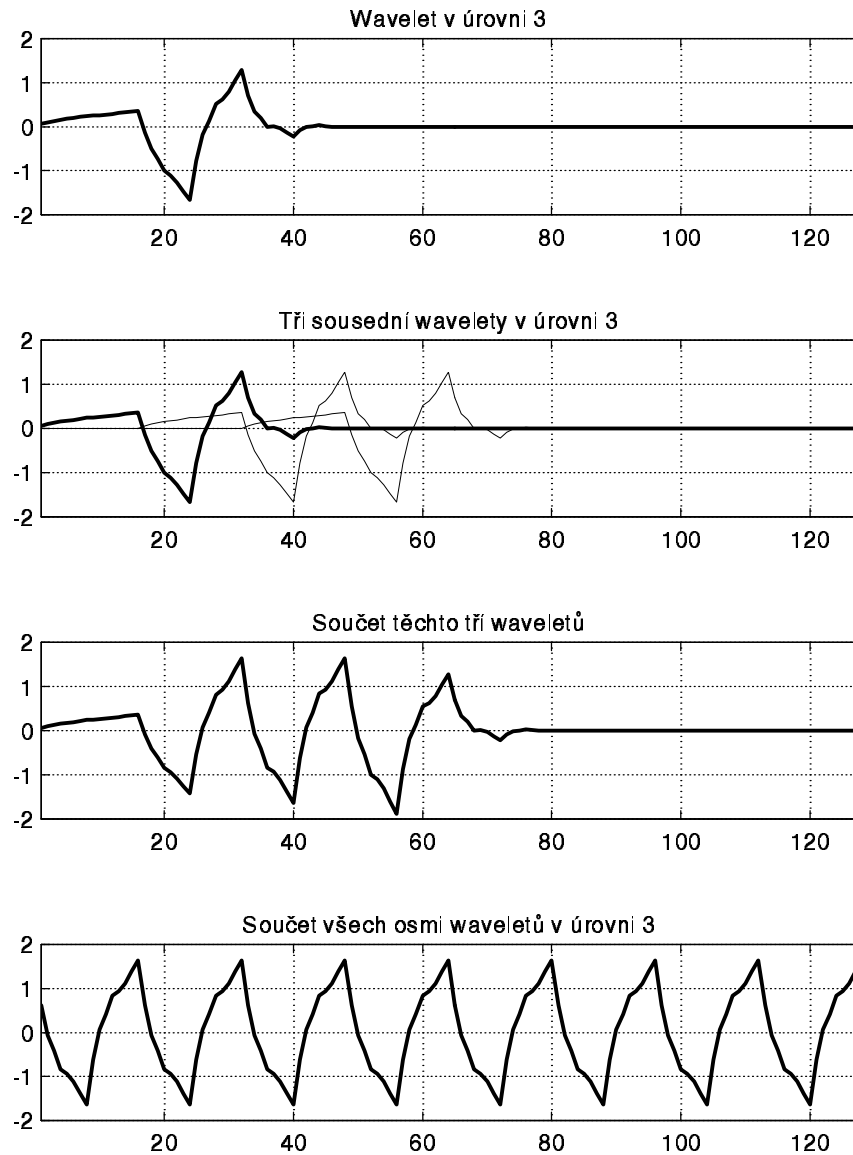


Obr. 2.2: Rekonstrukce obdélníkového signálu  $f(r)$  z jeho waveletových složek.

nemá žádný wavelet, je to pouze konstantní úroveň. Úroveň -1 je nutná, neboť každý wavelet má z definice nulovou střední hodnotu, a tak kombinací waveletů samotných nemůžeme vyjádřit signál s nenulovou střední hodnotou.

Pozice a šířka každého waveletu podél horizontální osy je určena strukturou waveletové transformace; měnit se může pouze vertikální velikost každého waveletu. Vertikální velikost každého waveletu je specifikována příslušným členem ve 128-členné řadě  $a(r)$ ,  $r = 1$  až 128. Cílem waveletové transformace je vzít počáteční datovou posloupnost, která reprezentuje vybranou délku navzorkovaného vstupního signálu  $f(r)$ ,  $r = 1$  až 128, a konvertovat ji do nové posloupnosti (reálných) čísel  $a(r)$ ,  $r = 1$  až 128, která definují vertikální velikost waveletů v každé z množin horizontálních měřítek a pozic takovým způsobem, že součet všech waveletů věrně reprodukuje původní signál. Čím je původní posloupnost delší (počet členů musí být mocninou dvou), tím je v transformaci úrovní více. Zvětšující se počet vzorkovacích bodů (pro daný časový interval) zvětšuje počet využitelných detailů. Nejvyšší úroveň transformace ukazuje tyto jemné detaily. Ostré hrany obdélníkového signálu z obr. 2.1 jsou odpovědné za wavelety v malých měřících. Lokální maximum waveletové transformace se využívá k detekci hran (Mallat a Zhong [MALL90]).

Později se dostaneme k logice algoritmu pro diskrétní waveletovou transformaci a její inverzi, ale čtenáři, kteří mají přístup k MATLABu, mohou již nyní experimentovat s programy uvedenými v *Dodatku*. Tato sbírka M-souborů zahrnuje  $wavedn(f,N)$  k výpočtu waveletové transformace posloupnosti  $f$  s  $2^n$  členy, která používá wavelet s  $N$  koeficienty ( $N$  sudé),  $iwavedn(f,N)$  k výpočtu



Obr. 2.3: Wavelet D4 v úrovni 3 použitý v obr. 2.1.

příslušné zpětné waveletové transformace,  $dcoeffs(N)$  k získání  $N$  koeficientů, které se používají v  $wavedn$  a  $iwavedn$  ( $N \leq 20$ ); a  $displayn(f,N)$  pro zobrazení grafů (viz obr. 2.1 a 2.2) libovolného reálného signálu  $f$  s  $2^n$  členy a jeho waveletové transformace s  $N$  koeficienty (postupný rozklad a složení).

## 2.2 Dilatační rovnice

Nyní si vyzkoušíme tvorbu ortogonálních waveletů z *dilatačních rovnic* (*dilation equations*). Tyto rovnice byly zevrubně prostudovány teprve nedávno. *Dilatovat* (*dilate*) je rozšiřovat, tedy *dilatování* (*dilation*) znamená roztážení. Bázová funkce  $\phi(x)$  je (horizontálně) dilatovanou verzí  $\phi(2x)$ . Funkce  $\phi(x)$  má stejnou výšku, ale je natažena na dvojnásobek na horizontální měřítko  $x$ , kde  $x$  je bezrozměrná nezávislá proměnná, která může v závislosti na aplikaci reprezentovat čas nebo délku. V dilatační rovnici je  $\phi(x)$  vyjádřeno jako konečná řada členů, z nichž každý obsahuje (například)  $\phi(2x)$ . Každý z těchto  $\phi(2x)$ -členů je na horizontální ose umístěn v jiné pozici, protože argument je místo  $2x$  roven  $(2x - k)$ , kde  $k$  je celé číslo (kladné nebo záporné). Základní dilatační rovnice má tvar

$$\phi(x) = c_0\phi(2x) + c_1\phi(2x - 1) + c_2\phi(2x - 2) + c_3\phi(2x - 3), \quad (2.1)$$

kde koeficienty  $c$  jsou numerické konstanty (obecně kladné i záporné). Kromě několika málo případů (viz Problém 1) není možné řešit rovnici (2.1) přímo; tj. nalézt hledanou funkci  $\phi(x)$ . Místo toho musíme sestavit  $\phi(x)$  nepřímou. Nejjednodušší postup je sestavit iterační algoritmus, ve kterém každá nová aproximace  $\phi_j(x)$  je vypočtena z předchozí aproximace  $\phi_{j-1}(x)$  podle schématu

$$\phi_j(x) = c_0\phi_{j-1}(2x) + c_1\phi_{j-1}(2x - 1) + c_2\phi_{j-1}(2x - 2) + c_3\phi_{j-1}(2x - 3). \quad (2.2)$$

Iterace skončí, když je  $\phi_j(x)$  nerozeznatelné od  $\phi_{j-1}(x)$ .

Začneme nejprve s funkcí  $\phi_0(x)$  - „obdélníkový puls“, pro kterou  $\phi_0(x) = 1$ , je-li  $0 \leq x < 1$ , a  $\phi_0(x) = 0$  jinde. Obdélníkový puls na intervalu  $x = 0$  až 1 přejde po jedné iteraci ve schodovitou funkci na intervalu  $x = 0$  až 2 (viz obr. 2.4 nahoře). Každý příspěvek k  $\phi_1(x)$  je znázorněn samostatně a potom je znázorněn součet všech čtyř příspěvků. Koeficienty  $c_0, c_1, c_2, c_3$ , které byly při výpočtu použity, měly hodnoty:

$$\begin{aligned} c_0 &= \left(1 + \sqrt{3}\right) / 4 & c_1 &= \left(3 + \sqrt{3}\right) / 4 \\ c_2 &= \left(3 - \sqrt{3}\right) / 4 & c_3 &= -\left(\sqrt{3} - 1\right) / 4 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Jak uvidíme později tyto hodnoty generují ortogonální wavelet D4. Písmeno D je odvozeno od profesorky Daubechies, která poprvé objevila vlastnosti ortogonálních waveletů (Daubechies [DAUB88, DAUB89, DAUB90]).

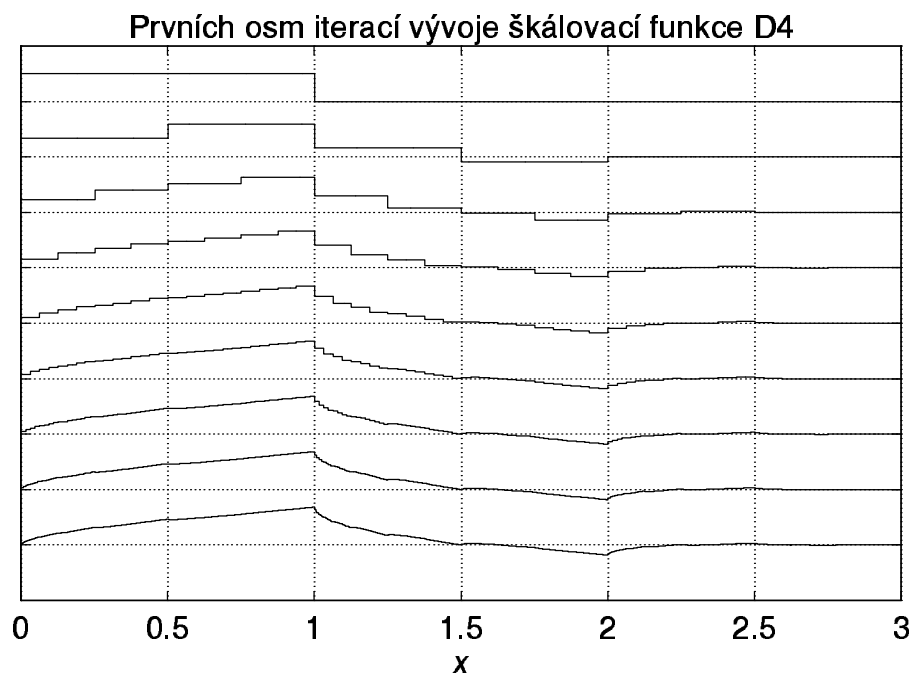
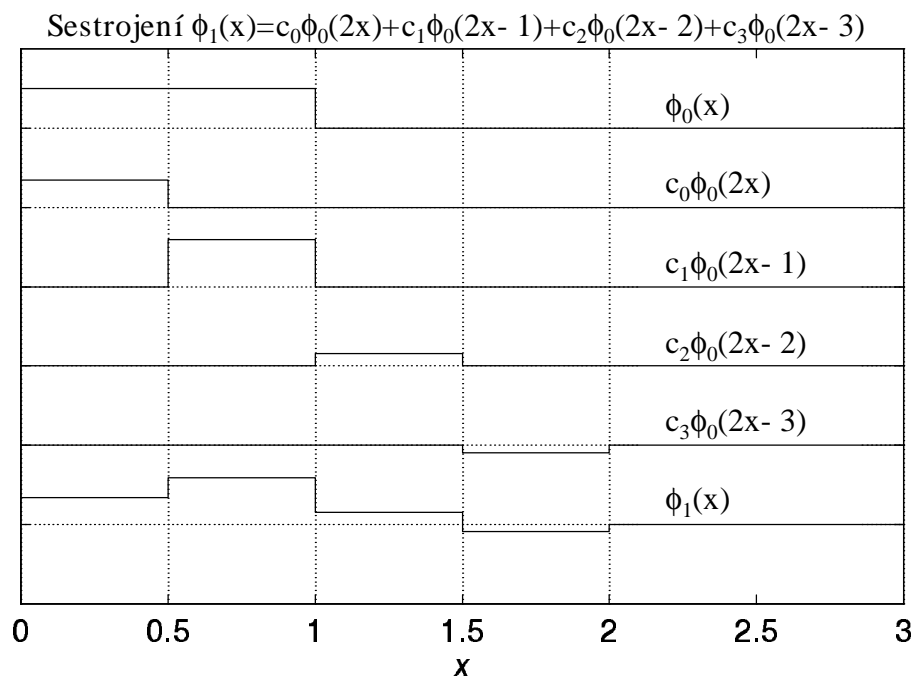
Když se v iteračním procesu pokračuje, přibližuje se funkce  $\phi(x)$  k limitnímu tvaru, který je uveden na obr. 2.4 dole. Neobvyklým rysem tohoto tvaru je jeho nespojitá povaha. Stejná funkce je znázorněna ve větším měřítku na obr. 2.5. Graf má povahu fraktálu; tj. je-li kreslen ve větším měřítku, jeho nepravidelné obrysy se zachovávají. K získání hladší funkce je třeba zahrnout do dilatační rovnice (2.1) více členů.

Funkce  $\phi(x)$ , vytvořená z obdélníkového pulsu (jednotková výška a délka), se nazývá *škálovací funkce* (*scaling function*) a tvorbou odpovídající waveletové funkce ze škálovací funkce se bude zabývat příští kapitola. Avšak nejprve se podrobněji zamysleme, jak iterační schéma použité v obr. 2.4 pracuje. První iterace (viz obr. 2.4 nahoře) vytvoří schodovitou funkci se čtyřmi schody, jejichž výška je  $c_0, c_1, c_2$  a  $c_3$  a které začínají v bodech  $x = 0, 0.5, 1$  a  $1.5$ . Ve druhé iteraci přispěje první schod (výška  $c_0$ , počátek v bodě  $x = 0$ ) ke čtyřem novým schodům, jejichž výška je  $c_0^2, c_0c_1, c_0c_2, c_0c_3$  a které začínají v bodech  $x = 0, 0.25, 0.5$  a  $0.75$ ; druhý schod (výška  $c_1$ , počátek v bodě  $x = 0.5$ ) ke čtyřem novým schodům, jejichž výška je  $c_1c_0, c_1^2, c_1c_2, c_1c_3$  a které začínají v bodech  $x = 0.5, 0.75, 1$  a  $1.25$ ; atd. Po druhé iteraci má výsledná schodovitá funkce (třetí řádek v obr. 2.4 dole) schody o výšce:  $c_0^2, c_0c_1, c_0c_2 + c_1c_0, c_0c_3 + c_1^2, c_1c_2 + c_2c_0, c_1c_3 + c_2c_1, c_2^2 + c_3c_0, c_2c_3 + c_3c_1, c_3c_2, c_3^2$ , které jsou umístěny v polohách:  $x = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5, 1.75, 2$  a  $2.25$ . Tyto hodnoty plynou z následujícího maticového schématu :

$$[\phi_2] = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 & c_0 \\ c_3 & c_1 \\ & c_2 & c_0 \\ & c_3 & c_1 \\ & & c_2 & c_0 \\ & & & c_3 & c_1 \\ & & & & c_2 \\ & & & & & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} [1] = \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1 [1] \quad (2.4)$$

kde  $\mathbf{M}_r$  označuje matici řádu  $(2^{r+1} + 2^r - 2) \times (2^r + 2^{r-1} - 2)$ , ve které má každý sloupec submatici koeficientů  $c_0, c_1, c_2$  a  $c_3$  umístěnu o dva řádky níž než ve sloupci nalevo.

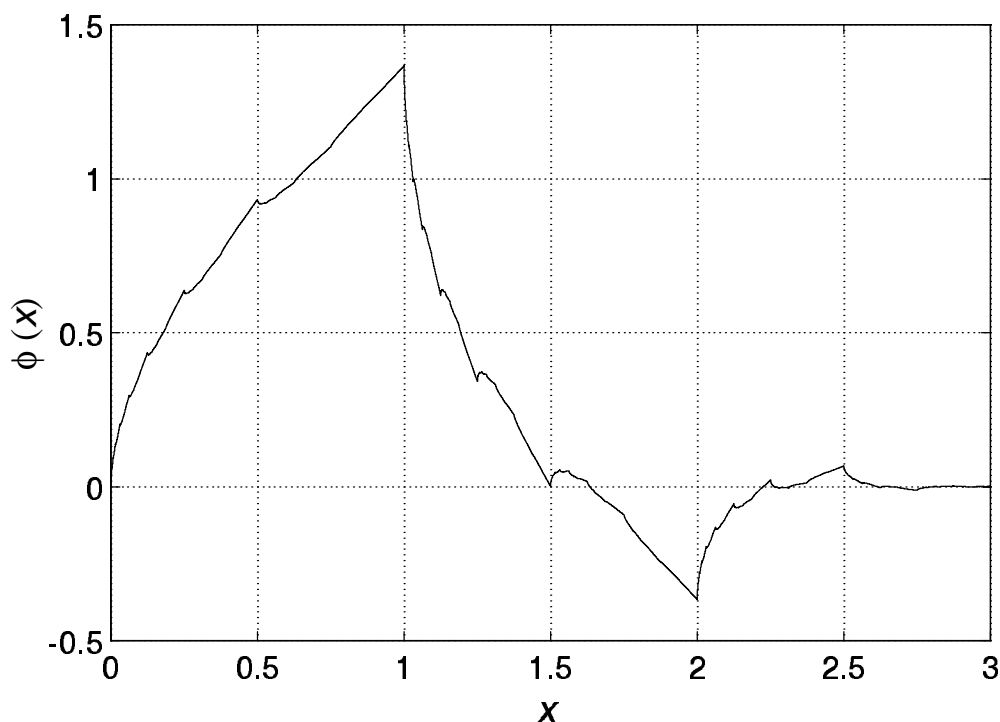
Počet bodů grafu se zvětšuje v řadě  $1, 4, 10, 22, 46, \dots, 2^{r+1} + 2^r - 2$ , takže po osmi iteracích se dosáhne  $2^9 + 2^8 - 2 = 766$  bodů, které jsou od sebe na horizontální ose vzdáleny o  $1/2^8 = 1/256$ . Graf začíná v  $x = 0$  a téměř (ale ne zcela) dosahuje k  $x = 3$ . Implementace tohoto schématu (iterační maticové násobení) je klíčovým bodem diskrétní waveletové transformace. Iterace není nejefektivnější metoda pro generování škálovací funkce  $\phi$  (rekurzivní metoda popsaná v Problému 2 je z tohoto hlediska lepší), ale je jednoduchá, snadno se programuje a pro ortogonální wavelety (záleží na výběru koeficientů  $c_0, c_1, c_2$  a  $c_3$ ) má matice  $\mathbf{M}_r$  speciální vlastnosti, které jsou podstatné pro práci diskrétní waveletové transformace.



Obr. 2.4: Sestrojení škálovací funkce D4 iterací z obdélníkového signálu na intervalu  $x = 0$  až 1.

### 2.3 Dilatační wavelety

Doposud jsme nedefinovali *wavelet*. Ten je popsán svojí *waveletovou funkcí*  $W(x)$ , která je odvozena z odpovídající škálovací funkce. Pro škálovací funkci se čtyřmi koeficienty definovanou v (2.1) je dilatační waveletová funkce



Obr. 2.5: Škálovací funkce D4 vypočtena pro  $3 \times 2^{12}$  bodů rekursivní metodou (Problém 2).

$$W(x) = -c_3\phi(2x) + c_2\phi(2x - 1) - c_1\phi(2x - 2) + c_0\phi(2x - 3). \quad (2.5)$$

Jsou použity *stejné* koeficienty jako pro definici  $\phi(x)$ , ale v opačném pořadí a se střídajícími se znaménky.

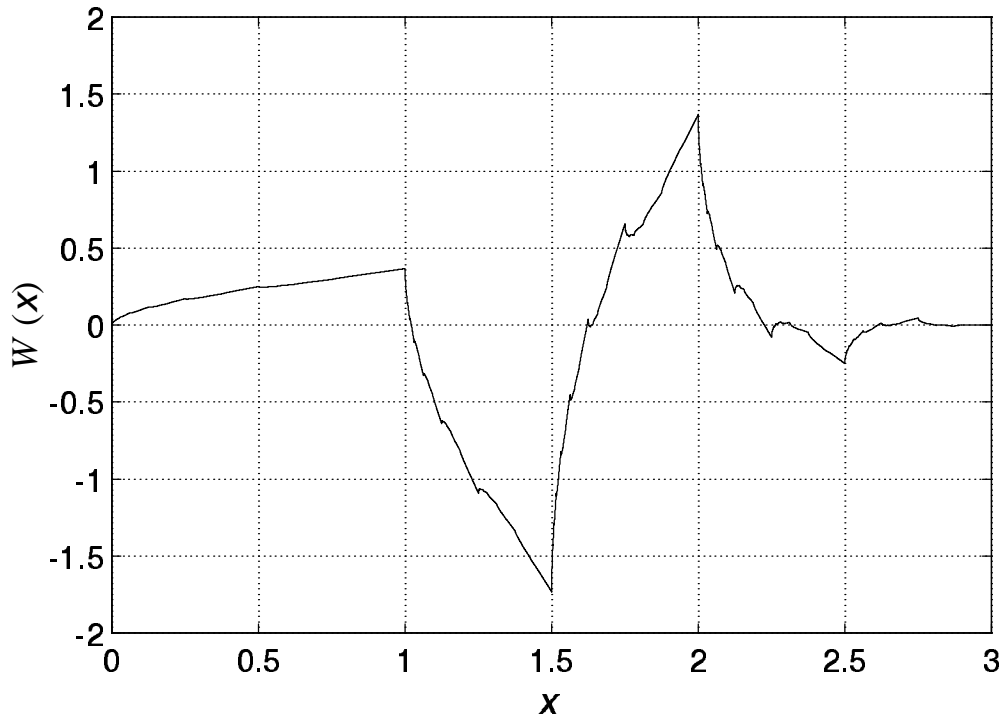
Výsledky vyčíslení vztahu (2.5) pro škálovací funkci D4 z obr. 2.5 jsou znázorněny na obr. 2.6. Jedná se o wavelet D4, který se objevil na obr. 2.3 a byl použit k analýze obdélníkového signálu v obr. 2.1 a 2.2. Zůstává zachována nespojitost a fraktálová povaha škálovací funkce. Tento wavelet má jistě dosti překvapující tvar, uvědomíme-li si, že jde o básovou funkci pro analýzu signálů.

Definice (2.5) může být pozměněna; jiná varianta definice (viz např. Strang [STRA89]) je

$$W(x) = c_3\phi(2x + 2) - c_2\phi(2x + 1) + c_1\phi(2x) - c_0\phi(2x - 1). \quad (2.6)$$

Tento vztah se příliš neliší od vztahu (2.5); wavelet má pouze opačnou hodnotu a místo, aby začínal v  $x = 0$ , jak je tomu na obr. 2.7, zaujímá interval  $x = -1$  až 2. Dále budeme používat již jen definici (2.5), neboť je vhodnější pro sestavování numerického algoritmu, který je základem diskretní waveletové transformace.

Vraťme se opět k maticovému schématu pro vytvoření  $\phi(x)$  pomocí iterace začínající z obdélníkového pulsu jednotkové výška i délky. Předpokládejme, že iterujeme až do okamžiku plného vyvinutí  $\phi(x)$  a že chceme generovat z této škálovací funkce  $\phi(x)$  wavelet  $W(x)$  podle vztahu (2.5). Pro



Obr. 2.6: Wavelet D4 podle vztahu (2.5).

jednoduchost si představme, že ke konečné  $\phi(x)$  vede pouze jedna iterace, takže škálovací funkce je reprezentována schodovitou funkcí se čtyřmi schody o výšce  $c_0, c_1, c_2$  a  $c_3$  v bodech  $x = 0, 0.5, 1$  a  $1.5$  (viz obr. 2.4 nahoře). Podle vztahu (2.5) generuje tato čtyř-schodovitá funkce schodovitou funkci o deseti schodech, z nichž každý má šířku  $0.25$ . Člen  $-c_3\phi(2x)$  ze vztahu (2.5) poskytuje  $-c_3c_0, -c_3c_1, -c_3c_2, -c_3^2$ ; člen  $-c_2\phi(2x-1)$  dává  $c_2c_0, c_2c_1, c_2^2, c_2c_3$  posunuté o dvě místa doprava; atd. pro ostatní členy, takže nové schody (nyní pro wavelet) jsou :

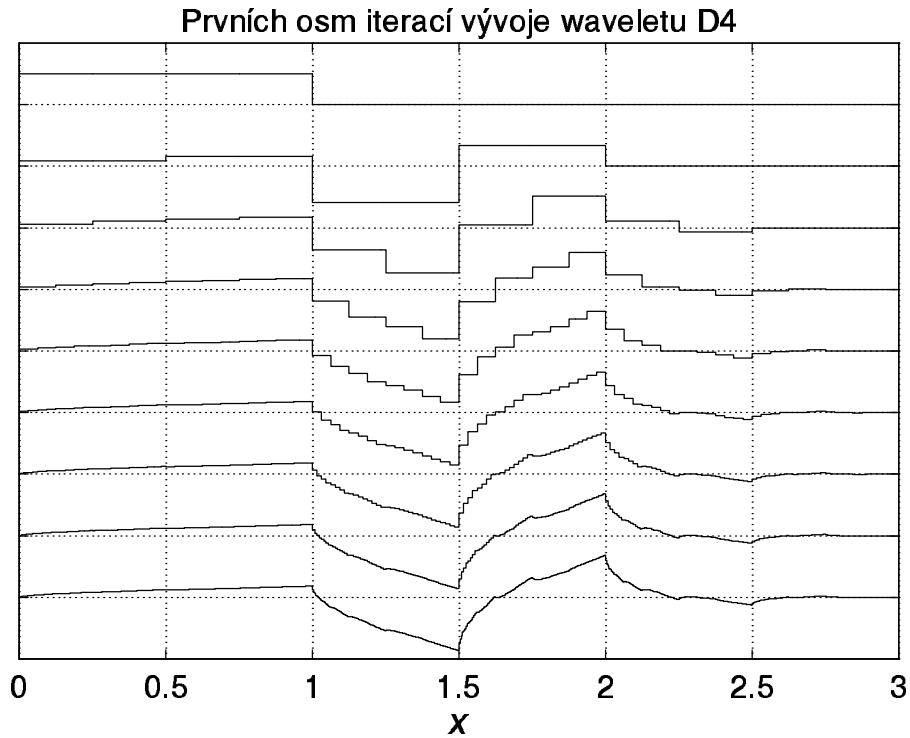
$$-c_3c_0, -c_3c_1, -c_3c_2 + c_2c_0, -c_3^2 + c_2c_1, c_2^2 - c_1c_0, c_2c_3 - c_1^2, -c_1c_2 + c_0^2, -c_1c_3 + c_0c_1, c_0c_2, c_0c_3.$$

Tyto hodnoty jsou generovány maticovým schématem

$$[W_2] = \begin{bmatrix} -c_3 \\ 0 & -c_3 \\ c_2 & 0 & -c_3 \\ 0 & c_2 & 0 & -c_3 \\ -c_1 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & -c_1 & 0 & c_2 \\ c_0 & 0 & -c_1 & 0 \\ & c_0 & 0 & -c_1 \\ & & c_0 & 0 \\ & & & c_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} [1] \quad (2.7)$$







Obr. 2.7: Wavelet D4 vypočtený iterací.

Čtenář si může ověřit (viz Problém 3), že tak jako jsou ekvivalentní vztahy (2.7) a (2.8), tak je stejný vztah (2.9) se vztahem

$$[W_3] = \mathbf{M}_3 \mathbf{M}_2 \begin{bmatrix} -c_3 \\ c_2 \\ -c_1 \\ c_0 \end{bmatrix} [1], \quad (2.10)$$

kde  $\mathbf{M}_3$  je matice řádu  $22 \times 10$  s 10 submaticemi  $[c_0 \ c_1 \ c_2 \ c_3]^T$  posunutými o dvě místa níž oproti submatici vlevo.

Rovnice (2.10) je důležitá, neboť se jedná o schéma, podle kterého se vytvářejí wavelety ve zpětné diskrétní waveletové transformaci (IDWT). Výpočet je ilustrován na obr. 2.7, který ukazuje výsledek výpočtu, který je podobný výpočtu vedoucímu k obr. 2.4, až na to, že první krok je  $[-c_3 \ c_2 \ -c_1 \ c_0]^T [1]$  místo  $[c_0 \ c_1 \ c_2 \ c_3]^T [1]$ . Všechny další kroky iterace používají matic  $\mathbf{M}_r$ , které se skládají ze submatic  $[c_0 \ c_1 \ c_2 \ c_3]^T$  rozložených vertikálně o dvě místa. Po osmi krocích vedoucích k 766 schodům (jako dříve) je vypočtený wavelet velice podobný (skoro stejný) waveletu na obr. 2.6.

## 2.4 Vlastnosti waveletových koeficientů

Abychom vytvořili dobré wavelety, musí být jejich koeficienty vybrány opatrně. Tato kapitola, která má šest částí, pojednává o podmínkách, které musí splňovat dobrá množina waveletových koeficientů, a důsledcích těchto podmínek. Prvních pět částí se těmito podmínkami zabývá detailně, kdežto v šesté části jsou výsledky vedoucí ke správné volbě waveletových koeficientů shrnuty ve formě praktických předpisů. Přesto jsou tyto podmínky komplikované a je třeba s nimi zacházet opatrně. Avšak výsledkem je, že pro volbu koeficientů existuje tolik nezávislých rovnic, kolik je třeba koeficientů zvolit; takže pokud se rozhodneme použít pouze čtyři koeficienty, existují čtyři rovnice, které je třeba vyřešit a tak obdržet hledané hodnoty; pokud chceme šest koeficientů, existuje šest rovnic a tak opět existuje pouze jedna množina hodnot. Tyto hodnoty již byly vypočteny a jsou publikovány v literatuře (např. Daubechies [DAUB88]). Pro wavelety s 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 a 20 koeficienty jsou hodnoty koeficientů uloženy v m-souboru  $c=dcoeffs(N)$ , kde  $N$  je počet koeficientů (vždy sudý) a  $c$  je pole řádu  $N$  obsahující koeficienty v pořadí  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{N-1}$ . S touto informací lze nyní přejít k další kapitole *Periodické waveletové transformace* a začít rozvažovat, jak je diskrétní waveletová transformace implementována v praxi. Avšak pro úplnost se teď budeme podrobněji zabývat, jak se vlastně waveletové koeficienty vypočtou, a budeme vyšetřovat podmínky, které musí splňovat.

Existují tři různé kategorie podmínek. První kategorie má právě jednu podmínku, kterou je, že součet koeficientů musí být vždy roven dvěma. Tato podmínka se nazývá podmínka *zachování plochy* (*conservation of area*). Jejím důsledkem je, že při iteračním vývoji škálovací funkce, se plocha škálovací funkce nemění (zůstává konstantní). Druhá kategorie podmínek, která obsahuje pro  $N$  koeficientů  $N/2 - 1$  nezávislých podmínek, vychází z potřeby zajistit, aby rozvoj nějaké části signálu do konečného počtu waveletů reprezentoval vlastní signál co nejpřesněji. Jinými slovy chceme, aby byl rozvoj přesný. Tím dostaneme hierarchii podmínek nazvaných *podmínky přesnosti* (*accuracy conditions*). Za třetí existuje kategorie podmínek požadovaných k zajištění ortogonality škálovací funkce a waveletů z ní odvozených. Pokud jsou škálovací funkce a wavelety ortogonální, jsou splněny rovnice ortogonality uvedené v páté části této kapitoly. Bez těchto podmínek ortogonality nebude diskrétní waveletová transformace fungovat, takže pro současné účely jsou *podmínky ortogonality* nezbytné. Později však uvidíme, že ve speciálních případech jsou používány rozvoje do členů neortogonálních waveletů, ale bez výhod diskrétní waveletové transformace popisované v této knize. Pro  $N$  waveletových koeficientů existuje  $N/2$  podmínek ortogonality.

Nyní si všechny tyto podmínky podrobně probereme.

### 2.4.1 Zachování plochy

Jak jsme již řekli, wavelet smí mít více nebo méně než čtyři koeficienty. Tzv. *kompaktně podpořované* (*compactly supported*) wavelety mají spočetně mnoho koeficientů. Proto můžeme vztah (2.1) přepsat do obecného tvaru

$$\phi(x) = \sum_k c_k \phi(2x - k), \quad (2.11)$$

kde  $k$  je libovolné celé číslo (kladné, nula nebo záporné). Z důvodu, který se stane zřejmý, budeme uvažovat pouze případy se sudým počtem ( $N$ ) nenulových koeficientů. Ve vztahu (2.1)  $N = 4$ , takže všechny koeficienty  $c$  byly nulové až na  $c_0, c_1, c_2$  a  $c_3$ . Vzhledem k obecné škálovací funkci (2.11) může být wavelet popsán jako

$$W(x) = \sum_k (-1)^k c_k \phi(2x + k - N - 1). \quad (2.12)$$

Dosažením  $N = 4$  a  $k = 0$  až  $3$  se vztah (2.12) zredukuje na dřívější vztah (2.5).

Zintegrujme nyní obě strany rovnice (2.11) přes  $x$ , abychom dostali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = \sum_k c_k \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2x - k) dx. \quad (2.13)$$

Změnou integrační proměnné na pravé straně rovnice ( $y = 2x - k$ ) dostaneme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = \sum_k c_k \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(yt) dy, \quad (2.14)$$

odkud plyne, že

$$\sum_k c_k = 2, \quad (2.15)$$

takže součet všech waveletových koeficientů se musí vždy rovnat dvěma.

Aplikujeme-li vztah (2.15) na iterační schéma (2.2), vidíme, že  $\int_{-\infty}^{\infty} \phi_j(x) dx$  zůstává stejné jako  $\int_{-\infty}^{\infty} \phi_{j-1}(x) dx$ , takže plocha se při iteraci nemění. Poněvadž na začátku iterace se používá jednotkový obdélníkový puls, jehož plocha je rovna jedné, plocha pod škálovací funkcí musí zůstat také rovna jedné. Proto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = 1 \quad (2.16)$$

je důsledek vztahu (2.15) a konstrukce  $\phi(x)$  iterací z jednotkového obdélníkového pulsu.

## 2.4.2 Přesnost

Kromě vztahu (2.15) musí waveletové koeficienty splňovat dvě další podmínky, které Strang ve svém skvělém úvodním článku [STRA89] nazval *podmínkou A* (presnost) a *podmínkou O* (ortogonalita). Uvažujme nejprve podmínku A.

Na obr. 2.1 je znázorněn rozklad obdélníkové vlny do waveletových složek, který využívá wavelet se čtyřmi koeficienty (viz vztah (2.3)). Obdélníková vlna byla vzorkována ve 128 bodech, abychom dostali  $f(r)$ ,  $r = 1$  až 128, a po zpracování diskrétní waveletovou transformací (DWT) a následně její inverzí (IDWT) dostaneme přesně tyto hodnoty  $f(r)$ . Ale ačkoliv je  $f(r)$  věrně obnoveno ve svých vzorkovacích bodech, mezi těmito body již tak dobrá shoda původního signálu a jeho reprezentace součtem waveletů nastat nemusí. To je znázorněno na obr. 2.8. Dvě periody sinusové vlny jsou navzorkovány v 64 bodech (32 bodů na periodu). Použijeme-li dvoučlenný wavelet (ve kterém jsou pouze dva nenulové waveletové koeficienty;  $c_0 = c_1 = 1$ ), DWT vygeneruje 64-člennou posloupnost, ze které může být původní signál zrekonstruován. Jednotlivé úrovně rekonstrukce jsou zobrazeny na obr. 2.8, včetně nejpřesnější rekonstrukce (vpravo dole). Z obr. 2.8 je zřejmé, že mezi vzorkovacími body dává dvoučlenný wavelet nepřesnou reprezentaci, které odpovídá konstantní signál.

Strang [STRA73, STRA89] studoval podmínky, které musí splňovat waveletové koeficienty, aby se dosáhlo co nejvěrnější reprezentace analyzovaného signálu. Ukázal, že to závisí na tvaru Fourierovy transformace škálovací funkce. Strang ukázal, že, má-li waveletový rozvoj přesně reprezentovat funkci  $f(x)$ , která je popsána rozvojem v polynomy  $(1, x, x^2, x^3, \dots, x^n)$ , musí být Fourierova transformace jeho škálovací funkce v jistém smyslu periodicky nulová. Tato podmínka může být zajištěna, pokud jsou waveletové koeficienty (které jsou také koeficienty škálovací funkce) vhodně zvoleny.

Fourierova transformace škálovací funkce je

$$P(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) e^{-i\xi x} dx. \quad (2.17)$$

Vzhledem ke vztahu (2.11) dostáváme

$$P(\xi) = \frac{1}{2\pi} \sum_k c_k \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2x - k) e^{-i\xi x} dx \quad (2.18)$$

a po změně integrační proměnné na  $y = 2x - k$  obdržíme

$$P(\xi) = \frac{1}{2} \sum_k c_k e^{-i(\xi/2)k} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) e^{-i(\xi/2)y} dy = \frac{1}{2} \sum_k c_k e^{-i(\xi/2)k} P(\xi/2). \quad (2.19)$$

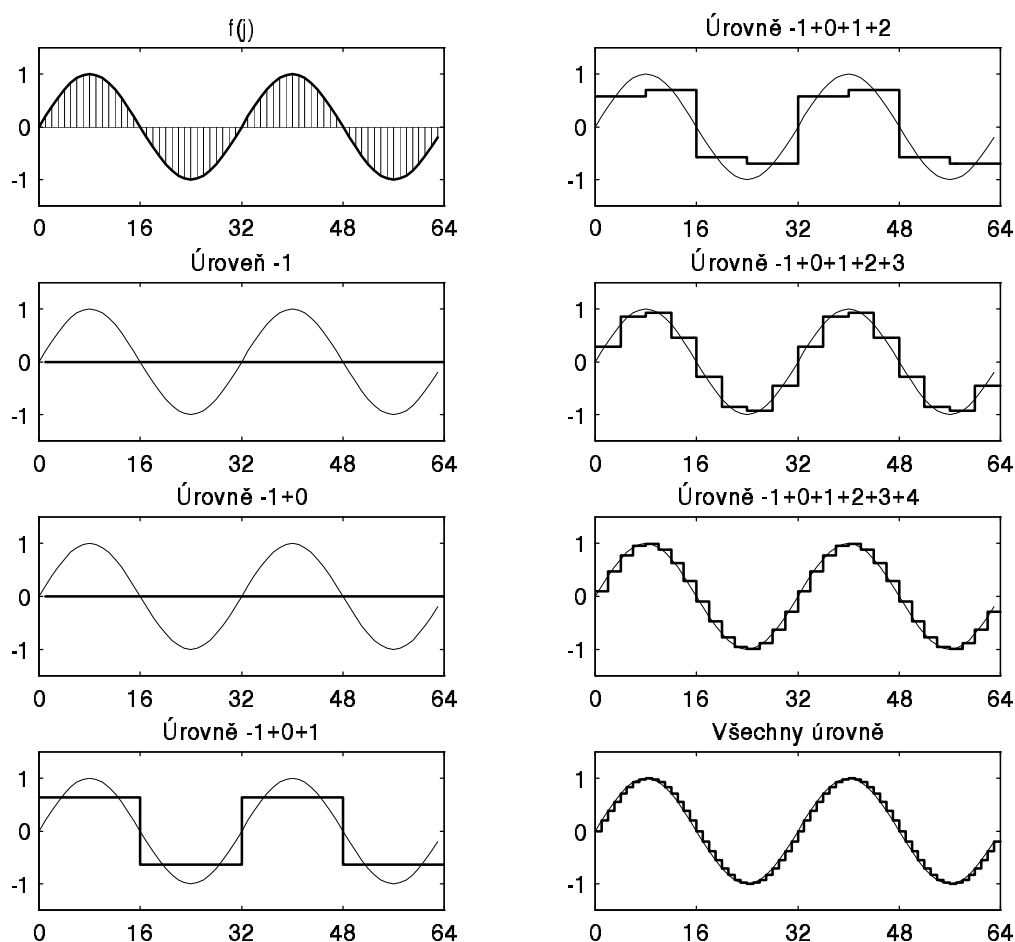
Při použití

$$p(\xi) = \frac{1}{2} \sum_k c_k e^{-i(\xi/2)k} \quad (2.20)$$

následně obdržíme

$$P(\xi) = p(\xi/2)P(\xi/2). \quad (2.21)$$

Substitucí  $\xi/2$  za  $\xi$  v tomto výrazu dostaneme



Obr. 2.8: Rekonstrukce sinusové vlny z jejích waveletových složek (D2) při vzorkování 32 bodů na periodu.

$$P(\xi/2) = p(\xi/4)P(\xi/4), \quad (2.22)$$

z čehož vidíme, že

$$P(\xi) = p(\xi/2)p(\xi/4)P(\xi/4) \quad (2.23)$$

atd., dokud se činitel na pravé straně rovnice vpravo nepřiblíží k  $P(0)$ , které je dle vztahu (2.1) rovno

$$P(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = \frac{1}{2\pi}, \quad (2.24)$$

protože plocha pod škálovací funkcí je jednotková (viz vztah (2.16)). Fourierova transformace  $P(\xi)$  škálovací funkce  $\phi(x)$  lze tedy vyjádřit jako nekonečný součin

$$P(\xi) = \frac{1}{2\pi} \prod_{j=1}^{\infty} p(\xi/2^j), \quad (2.25)$$

kde

$$p(\xi/2^j) = \frac{1}{2} \sum_k c_k e^{-i(\xi/2^j)k}. \quad (2.26)$$

Strangova podmínka přesnosti (Strang [STRA89] a Strang a Fix [STRA73]) spočívá v tom, že Fourierova transformace  $P(\xi)$  musí mít nuly nejvyššího možného řádu, je-li  $\xi = 2\pi, 4\pi, 6\pi$  atd. (viz Problém 4).

$$P(2\pi) = \frac{1}{2\pi} p(\pi) p(\pi/2) p(\pi/4) p(\pi/8) \dots \quad (2.27)$$

První z těchto činitelů ( $p(\pi)$ ) bude nulový řádu  $n$ , pokud

$$\frac{d^m p(\xi)}{d\xi^m} = 0, \text{ když } \xi = \pi \text{ pro } m = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad (2.28)$$

což nastane v případě, je-li

$$\sum_k c_k (-ik)^m e^{-i\pi k} = 0 \text{ pro } m = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (2.29)$$

Poněvadž  $e^{-i\pi k} = (-1)^k$ ,  $p(\pi)$  bude nulové řádu  $n$ , pokud

$$\sum_k (-1)^k k^m c_k = 0 \text{ pro } m = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (2.30)$$

Jestliže je tato podmínka splněna, je jeden z činitelů  $P(2\pi)$  nulový řádu  $n$  a tedy i  $P(2\pi)$  musí být nulové stejného řádu (nebo vyšší, je-li jiný činitel také nulový).

Nyní uvažujme  $P(\xi = 4\pi)$ . Ze vztahu (2.25) plyne

$$P(4\pi) = \frac{1}{2\pi} p(2\pi) p(\pi) p(\pi/2) p(\pi/4) \dots \quad (2.31)$$

Poněvadž  $p(\pi)$  je činitel,  $P(4\pi)$  je nulové alespoň řádu  $n$ . Pro  $P(6\pi)$  máme

$$P(6\pi) = \frac{1}{2\pi} p(3\pi) p(3\pi/2) p(3\pi/4) \dots \quad (2.32)$$

a z důvodu periodicity  $p(3\pi) = p(2\pi + \pi) = p(\pi)$ , takže  $p(\pi)$  je opět činitel. Stejně výsledky dostaneme pro  $P(8\pi)$ ,  $P(10\pi)$ , atd. Závěr je ten, že vztah (2.30) je postačující podmínkou pro to, aby Fourierova transformace  $P(\xi)$  byla nulová řádu  $n$  pro  $\xi = 2\pi$  a všechny další násobky

$2\pi$ . Tedy vztah (2.30) je předpis pro volbu waveletových koeficientů, která zajistí nejlepší možnou dosažitelnou přesnost.

Rozepíšeme-li předpis (2.30) detailně, dostaneme následující rovnice, které musí splňovat waveletové koeficienty :

$$m = 0 : \quad c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + c_4 - \dots = 0 \quad (2.33)$$

$$m = 1 : \quad -c_1 + 2c_2 - 3c_3 + 4c_4 - \dots = 0 \quad (2.34)$$

$$m = 2 : \quad -c_1 + 4c_2 - 9c_3 + 16c_4 - \dots = 0 \quad (2.35)$$

$$m = 3 : \quad -c_1 + 8c_2 - 27c_3 + 64c_4 - \dots = 0 \quad (2.36)$$

atd. pro větší hodnoty  $m$ . Počet rovnic, které mohou být splněny, závisí na tom, kolik koeficientů existuje a na dalších podmínkách, které musí být splněny: podmínka zachování plochy (2.15) a podmínky ortogonality, ke kterým se dostaneme zakrátko.

### 2.4.3 Podmínky ortogonality pro matici $\mathbf{M}_r$

Už jsme viděli, že iterační vývoj škálovací funkce  $\phi(x)$  z jednotkového obdélníkového pulsu závisí na vlastnostech matice  $\mathbf{M}_r$ , jejíž sloupce obsahují submatice waveletových koeficientů  $[c_0 \ c_1 \ c_2 \ c_3]^T$  a každá submatice je posunuta o dvě místa níž oproti submatici vlevo. Uvažujme obrácený chod tohoto iteračního procesu. Předpokládejme, že existují pouze dva kroky, takže máme vztah (2.4)

$$\phi_2 = \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1 [1]. \quad (2.37)$$

Vynásobíme-li obě strany rovnice členem  $\alpha \mathbf{M}_2^T$  a  $\alpha \mathbf{M}_1^T$ , kde  $\mathbf{M}_2^T$  a  $\mathbf{M}_1^T$  jsou transponované matice  $\mathbf{M}_2$  a  $\mathbf{M}_1$  a  $\alpha$  je dosud neurčený skalární činitel, dostaneme

$$\alpha \mathbf{M}_1^T \alpha \mathbf{M}_2^T \phi_2 = \alpha \mathbf{M}_1^T \alpha \mathbf{M}_2^T \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1 [1], \quad (2.38)$$

a pokud jsou matice  $\mathbf{M}$  ortogonální, musí platit

$$\alpha \mathbf{M}_2^T \mathbf{M}_2 = \mathbf{I}; \quad \alpha \mathbf{M}_1^T \mathbf{M}_1 = \mathbf{I}; \quad (2.39)$$

potom dostaneme

$$\alpha^2 \mathbf{M}_1^T \mathbf{M}_2^T \phi_2 = [1] \quad (2.40)$$

a iterace může být obrácena.

Jaké jsou podmínky po aplikaci vztahu (2.39)? V případě  $\mathbf{M}_1$  máme





z čehož vyplývá podmínka

$$\sum_k c_k c_{k+2m} = 0 \text{ pro } \forall k \text{ kromě } m = 0. \quad (2.47)$$

Předpokládejme, že existuje šest koeficientů ( $c_0$  až  $c_5$ ); podmínky ortogonalitě potom jsou

$$c_0 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_4 + c_3 c_5 = 0 \quad \text{pro } m = 1 \quad (2.48)$$

$$c_0 c_4 + c_1 c_5 = 0 \quad \text{pro } m = 2 \quad (2.49)$$

Pro  $m = 3$ , neexistují nenulové součiny, neboť z definice jsou  $c_0$  až  $c_5$  jediné nenulové koeficienty.

#### 2.4.4 Důsledky těchto podmínek

Je-li splněn vztah (2.47), pak je škálovací funkce  $\phi(x)$  ortogonální se svojí posunutou verzí  $\phi(x-m)$ , pro  $m$  libovolné celé, nenulové, takže

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\phi(x-m) dx = 0 \text{ pro } m \neq 0. \quad (2.50)$$

Důkaz je následující: Uvažujme iterační vytvoření  $\phi(x)$  z jednotkového obdélníkového pulsu. Jednotkový obdélníkový puls je ortogonální vzhledem ke svému posunutí, neboť každý puls zaujímá pouze jednotkový interval, a proto se posunutý obdélníkový puls nikdy nepřekrývá s původním pulsem (mějme na paměti, že posun znamená posun o jeden nebo více jednotkových intervalů). Nazvěme obdélníkovou funkci  $\phi_0(x)$ . Po první iteraci dostaneme  $\phi_1(x)$ , pro které vzhledem ke vztahu (2.2) můžeme psát,

$$\phi_1(x) = \sum_k c_k \phi_0(2x - k). \quad (2.51)$$

Potom

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(x)\phi_1(x-m) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_k c_k \phi_0(2x - k) \sum_j c_j \phi_0(2x - 2m - j) dx \\ &= \sum_k \sum_j c_k c_j \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(2x - k)\phi_0(2x - 2m - j) dx. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Protože  $\phi_0(x)$  je ortogonální vzhledem k jednotkovému posunu, je integrál nulový s výjimkou  $k = 2m + j$ , z čehož pro  $j$  plyne  $j = k - 2m$ , a tak výraz

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(x)\phi_1(x-m) dx = \sum_k c_k c_{k-2m} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0^2(2x) dx \quad (2.53)$$

je s ohledem na vztah (2.47) nulový pro všechna nenulová  $m$ . Tedy funkce, která je výsledkem jedné iterace ortogonální funkce, je sama ortogonální. Tento postup může být zopakován pro druhou a další iterace a vede k závěru, že škálovací funkce  $\phi(x)$  musí být sama ortogonální, tedy musí splňovat vztah (2.50).

Důsledek vztahu (2.50) je, že škálovací koeficient  $\alpha$  ze vztahu (2.42) musí být  $1/\sqrt{2}$ . Což je vidět, dosadíme-li za  $\phi(x)$  ze vztahu (2.11). Tím dostaneme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(x) dx = \sum_k \sum_j c_k c_j \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2x - k) \phi(2x - j) dx, \quad (2.54)$$

který je nulový s ohledem na vztah (2.50), až na případ  $j = k$ , takže

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(x) dx = \sum_k c_k^2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(2x - k) dx = \frac{1}{2} \sum_k c_k^2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(y) dy, \quad (2.55)$$

z čehož plyne, že

$$\sum_k c_k^2 = 2. \quad (2.56)$$

Nyní ukážeme, že (pro jakékoli koeficienty) waveletová funkce  $W(x)$  je automaticky ortogonální ke své škálovací funkci  $\phi(x)$  a posuvům škálovací funkce  $\phi(x - m)$ , tj. platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x) \phi(x - m) dx = 0 \text{ pro } \forall m. \quad (2.57)$$

Dosadíme-li za  $W(x)$  ze vztahu (2.12) a za  $\phi(x - m)$  ze vztahu (2.11), dostaneme

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x) \phi(x - m) dx = \sum_k (-1)^k c_k \sum_j c_j \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2x + k - N + 1) \phi(2x - 2m - j) dx \quad (2.58)$$

a použitím vztahu (2.50) zjistíme, že tento integrál je nulový, až na případ  $2m + j = N - 1 - k$ ; tj.  $j = N - 1 - k - 2m$  a

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x) \phi(x - m) dx = \sum_k (-1)^k c_k c_{N-1-k-2m} \int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(2x) dx \quad (2.59)$$

Předpokládejme, že  $N = 4$ , a tedy podle vztahu (2.5) existují čtyři koeficienty  $c_0, c_1, c_2$  a  $c_3$ . Potom

$$\sum_k (-1)^k c_k c_{3-k-2m} = c_0 c_{3-2m} - c_1 c_{2-2m} + c_2 c_{1-2m} - c_3 c_{-2m}. \quad (2.60)$$

Pro  $m = 0$ , dostaneme

$$\sum_k (-1)^k c_k c_{3-k} = c_0 c_3 - c_1 c_2 + c_2 c_1 - c_3 c_0; \quad (2.61)$$

je-li  $m = 1$ ,

$$\sum_k (-1)^k c_k c_{1-k} = c_0 c_1 - c_1 c_0 = 0; \quad (2.62)$$

pro  $m > 1$ , jsou koeficienty  $c_{3-k-2m}$  všechny nulové, takže  $\sum_k (-1)^k c_k c_{3-k-2m}$  je identicky nulová pro všechna  $m$ . Tatáž symetrie platí pro libovolnou hodnotu  $N$ , protože součin

$$(-1)^{k_1} c_{k_1} c_{N-1-k_1-2m} = -(-1)^{k_2} c_{k_2} c_{N-1-k_2-2m}, \quad (2.63)$$

když  $k_2 = N - 1 - k_1 - 2m$ , s podmínkou, že  $N$  je sudé číslo (tj. existuje sudý počet koeficientů). Tedy, bude-li  $k_1$  sudé, bude  $k_2$  liché, a naopak.

Závěr je takový, že vztah (2.57) je pro jakékoli waveletové koeficienty vždy splněn, pokud existuje sudý počet koeficientů; potom  $N$  je sudé a odpovídající páry členů se vyruší. Dále můžeme zjistit, že pro všechna  $m$  je  $\phi(x - m)$  ortogonální k  $W(2x)$ , což plyne ze vztahu (2.57). Příčina je následující: podle vztahu (2.11) lze  $\phi(x - m)$  psát jako sumu členů  $\phi(2x - 2m - k)$  a každý z těchto členů (viz vztah (2.57)) je ortogonální k  $W(2x)$ , takže jejich suma je také ortogonální k  $W(2x)$ . Tudíž

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(2x) \phi(x - m) dx = 0 \text{ pro } \forall m. \quad (2.64)$$

Stejným postupem můžeme ukázat, že  $W(2x - m)$  je pro všechna  $m$  ortogonální k  $W(x)$ . Příčinou je, že podle vztahu (2.12) lze  $W(x)$  psát jako sumu škálovacích funkcí  $\phi(2x + k - N + 1)$  a každá z těchto funkcí je podle vztahu (2.57) ortogonální k  $W(2x - m)$ , takže  $W(x)$  musí být ortogonální k  $W(2x - m)$ , tj.

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x) W(2x - m) dx = 0 \text{ pro } \forall m \neq 0. \quad (2.65)$$

Konečně uvažujme podmínky pro ortogonalitu  $W(x)$  ke svým posuvům  $W(x - m)$ , tj.

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x) W(x - m) dx = 0 \text{ pro } \forall m \neq 0. \quad (2.66)$$

Ze vztahu (2.12) dostáváme

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} W(x) W(x - m) dx = \\ \sum_k \sum_j (-1)^k (-1)^j c_k c_j \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2x + k - N + 1) \phi(2x + j - N + 1 - 2m) dx. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Integrál na pravé straně je podle vztahu (2.50) nulový, až na případ  $k = j - 2m$ , takže

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x)W(x-m) dx = \sum_k (-1)^{2(k+m)} c_k c_{k+2m} \int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(2x) dx \quad (2.68)$$

bude vždy nulové, neboť (viz podmínka (2.47))

$$\sum_k c_k c_{k+2m} = 0 \text{ pro } \forall m \neq 0. \quad (2.69)$$

Podmínka (2.47) tedy zajišťuje, že wavelety s těmito koeficienty jsou ortogonální:

1. ke svým vlastním posuvům (s nebo bez dilatace),
2. ke své odpovídající škálovací funkci a jejím posuvům.

### 2.4.5 Shrnutí ortogonálních vlastností

Pokud existuje sudý počet waveletových koeficientů a tyto koeficienty splňují podmínky dané vztahem

$$(2.47) \quad \sum_k c_k c_{k+2m} = 0 \quad m \neq 0,$$

potom platí, že

$$(2.50) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\phi(x-m) dx = 0 \quad m \neq 0,$$

$$(2.57) \quad \int_{-\infty}^{\infty} W(x)\phi(x-m) dx = 0,$$

$$(2.64) \quad \int_{-\infty}^{\infty} W(2x)\phi(x-m) dx = 0,$$

$$(2.65) \quad \int_{-\infty}^{\infty} W(x)W(2x-m) dx = 0 \quad m \neq 0,$$

$$(2.66) \quad \int_{-\infty}^{\infty} W(x)W(x-m) dx = 0 \quad m \neq 0.$$

Rovnice (2.50) a (2.66) závisí na vztahu (2.47); rovnice (2.57), (2.64) a (2.65) jsou identicky nulové, je-li počet waveletových koeficientů  $N$  sudý. Výraz  $W(2x)$  ve vztahu (2.64) resp. výraz  $W(2x-m)$  ve vztahu (2.65) může být nahrazen výrazem  $W(2^n x)$  resp. výrazem  $W(2^n x - m)$ ,  $n \geq 0$ , tím dostaneme

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(2^n x)\phi(x-m) dx = 0 \quad n \geq 0, \quad (2.70)$$

resp.

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x)W(2^n x - m) dx = 0 \quad n \geq 0, \text{ je-li } n = 0, \text{ pak } m \neq 0. \quad (2.71)$$

Ověření těchto vztahů je obdobné jako ověření vztahů (2.64) a (2.65), až na to, že  $\phi(x-m)$  ve vztahu (2.70) resp.  $W(x)$  ve vztahu (2.71) musí být před aplikací vztahu (2.57) rozvinuty  $n$ -násobným použitím vztahu (2.11) a (2.12).

Výsledek je pozoruhodný tím, že jedna jednoduchá podmínka (2.47) pro waveletové koeficienty zajišťuje ortogonalitu waveletového systému bez potřeby explicitního výrazu pro wavelet nebo jeho škálovací funkci.

Na závěr této kapitoly si detailněji povšimneme hodnoty vztahů (2.50) a (2.66) v případě  $m = 0$ . Již dříve jsme viděli, že se během iterací, při  $\sum_k c_k = 2$ , zachovává plocha, a tedy plocha pod škálovací funkcí, která se odvozuje od jednotkového obdélníkového pulsu, je rovna jedné, jak je specifikováno ve vztahu (2.16). Z důvodu dodatečné podmínky (2.56), která zní  $\sum_k c_k^2 = 2$ , obdržíme podobný výsledek i pro kvadrát škálovací funkce. Ze vztahu (2.53) pro  $m = 0$  vidíme, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_1^2(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0^2(x) dx,$$

což je pro jednotkový obdélníkový puls, jako startující funkci, rovno jedné. Aplikace stejného postupu pro každou další iteraci vede k obecnému závěru, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(x) dx = 1. \quad (2.72)$$

Také pro vztah (2.68) při  $m = 0$  dostaneme

$$\int_{-\infty}^{\infty} W^2(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(x) dx,$$

z čehož okamžitě plyne, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} W^2(x) dx = 1. \quad (2.73)$$

Zvláštním rysem škálovací funkce a jí odpovídající waveletové funkce (za předpokladu, že jsou ortogonální) je tudíž skutečnost, že zůstávají normalizované, to znamená, že vztahy (2.72) a (2.73) jsou vždy splněny.

Plocha pod waveletovou funkcí je vždy nulová vlivem podmínky přesnosti pro waveletové koeficienty (2.30), která pro  $m = 0$  zní

$$\sum_k (-1)^k c_k = 0. \quad (2.74)$$

Integrací obou stran vztahu (2.12) získáme

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x) dx = \sum_k (-1)^k c_k \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) dy, \quad (2.75)$$

což je nula díky vztahu (2.74). A tak musí vždy platit, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x) dx = 0. \quad (2.76)$$

### 2.4.6 Souhrn waveletových podmínek

Sudý počet  $N$  waveletových koeficientů  $c_k$ ,  $k = 0$  až  $N - 1$ , které definují škálovací funkci  $\phi(x)$  vztahem

$$(2.11) \quad \phi(x) = \sum_k c_k \phi(2x - k)$$

a odpovídající wavelet vztahem

$$(2.12) \quad W(x) = \sum_k (-1)^k c_k \phi(2x + k - N - 1),$$

musí splňovat následující podmínky :

$$(i) \quad (2.15) \quad \sum_k c_k = 2,$$

z čehož plyne, že škálovací funkce je jednoznačná a během iterací zachovává jednotkovou plochu;

$$(ii) \quad (2.30) \quad \sum_k (-1)^k k^m c_k = 0$$

pro celé číslo  $m = 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1$  (tak velké, jak jen umožní počet koeficientů) pro dosažení přesnosti;

$$(iii) \quad (2.47) \quad \sum_k c_k c_{k+2m} = 0 \quad m \neq 0$$

pro  $m = 1, 2, \dots, N/2-1$ , aby se vytvořil ortogonální waveletový systém, s dodatečnou podmínkou

$$(2.56) \quad \sum_k c_k^2 = 2,$$

která je důsledkem ortogonality škálovací funkce (2.50) a dává během integrace konstantní střední kvadratickou hodnotu.

Počet rovnic, které musí být splněny pro  $N$  koeficientů, je následující:

z podmínky (i)	1
z podmínky (ii)	$N/2$
z podmínky (iii)	$N/2$
Celkově	$N + 1$

takže existuje o jednu rovnici víc, než je počet koeficientů.

Příčina skutečnosti, že existuje  $N + 1$  rovnic pro  $N$  koeficientů, spočívá v tom, že první podmínka přesnosti ( $m = 0$  v (2.30)) je redundantní. Tuto podmínku lze odvodit z podmínky zachování plochy (2.15) a podmínky ortogonality (2.47 a 2.56). Ukažme si to: Vložení  $m = 0$  do vztahu (2.30) dostaneme vztah (2.33), který může být zapsán jako

$$\sum_{k \text{ sudé}} c_k - \sum_{k \text{ liché}} c_k = 0. \quad (2.77)$$

Zkombinujeme-li toto se vztahem (2.15), obdržíme

$$\sum_{k \text{ sudé}} c_k = \sum_{k \text{ liché}} c_k = 1, \quad (2.78)$$

takže

$$\left( \sum_{k \text{ sudé}} c_k \right)^2 + \left( \sum_{k \text{ liché}} c_k \right)^2 = 2. \quad (2.79)$$

Po vynásobení

$$\sum_{k=0}^{N-1} c_k^2 + 2 \sum_{m=1}^{N/2-1} \sum_{k=0}^{N-1} c_k c_{k+2m} = 2, \quad (2.80)$$

což vzhledem ke vztahu (2.56) znamená, že

$$\sum_m \sum_k c_k c_{k+2m} = 0, \quad m \neq 0. \quad (2.81)$$

Stejný výsledek se získá vypsáním všech ortogonálních podmínek (2.47) a jejich následným součtem. Proto výsledek vložení  $m = 0$  do vztahu (2.30) nevytváří novou rovnici, ale pouze reprodukuje podmínku odvozenou z kombinace vztahů (2.15), (2.47) a (2.56).

*Haarův wavelet* (nazvaný podle A. Haara [HAAR10]) má pouze dva waveletové koeficienty,  $N = 2$ , z čehož dostáváme následující soustavu rovnic

$$\begin{aligned} c_0 + c_1 &= 2, & z \text{ (i)} \\ c_0 - c_1 &= 0, & z \text{ (ii)} \\ c_0^2 + c_1^2 &= 2, & z \text{ (iii)} \end{aligned} \tag{2.82}$$

jejímž řešením je

$$c_0 = c_1 = 1. \tag{2.83}$$

Pro čtyři waveletové koeficienty,  $N = 4$ , dostaneme soustavu

$$c_0 + c_1 + c_2 + c_3 = 2, \quad z \text{ (i)} \tag{2.84}$$

$$\begin{aligned} c_0 - c_1 + c_2 - c_3 &= 0 \\ c_1 + 2c_2 - 3c_3 &= 0 \end{aligned}, \quad z \text{ (ii)} \tag{2.85}$$

$$\begin{aligned} c_0c_2 + c_1c_3 &= 0 \\ c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 &= 2 \end{aligned}, \quad z \text{ (iii)} \tag{2.86}$$

jejímž řešením je

$$\begin{aligned} c_0 &= \left(1 + \sqrt{3}\right) / 4 & c_1 &= \left(3 + \sqrt{3}\right) / 4 \\ c_2 &= \left(3 - \sqrt{3}\right) / 4 & c_3 &= -\left(\sqrt{3} - 1\right) / 4 \end{aligned} \tag{2.87}$$

Wavelety s těmito čtyřmi koeficienty se často nazývají *wavelety  $D_4$*  po Ingrid Daubechies [DAUB88, DAUB89, DAUB90], která prvně popsala jejich vlastnosti.

Pro šest waveletových koeficientů,  $N = 6$ , dostaneme soustavu

$$c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 = 2, \quad z \text{ (i)} \tag{2.88}$$

$$\begin{aligned} c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + c_4 - c_5 &= 0 \\ -c_1 + 2c_2 - 3c_3 + 4c_4 - 5c_5 &= 0, & z \text{ (ii)} \\ -c_1 + 4c_2 - 9c_3 + 16c_4 - 25c_5 &= 0 \end{aligned} \tag{2.89}$$



$$\begin{aligned}
c_0c_2 + c_1c_3 + c_2c_4 + c_3c_5 &= 0 \\
c_0c_4 + c_1c_5 &= 0, \quad \text{z (iii)} \\
c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 + c_5^2 &= 2
\end{aligned} \tag{2.90}$$

Její řešení je

$$\begin{aligned}
c_0 &= \left( 1 + \sqrt{10} + \sqrt{5 + 2\sqrt{10}} \right) / 16 \\
c_1 &= \left( 5 + \sqrt{10} + 3\sqrt{5 + 2\sqrt{10}} \right) / 16 \\
c_2 &= \left( 5 - \sqrt{10} + \sqrt{5 + 2\sqrt{10}} \right) / 8 \\
c_3 &= \left( 5 - \sqrt{10} - \sqrt{5 + 2\sqrt{10}} \right) / 8 \\
c_4 &= \left( 5 + \sqrt{10} + 3\sqrt{5 + 2\sqrt{10}} \right) / 16 \\
c_5 &= \left( 1 + \sqrt{10} - \sqrt{5 + 2\sqrt{10}} \right) / 16
\end{aligned} \tag{2.91}$$

Tyto hodnoty definují wavelet  $D6$ .

Pro více než šest waveletových koeficientů lze řešení vypočítat pouze numericky. Výsledky těchto výpočtů jsou uvedeny v literatuře. V Dodatku je uvedena funkce MATLABu  $dcoeff(N)$ , která vrací matici  $[ c(1) \ c(2) \ \dots \ C(N) ]$  waveletových koeficientů pro  $N = 2, 4, 6, \dots, 20$  a používá při tom výsledků uvedených prof. Daubechies [DAUB88].

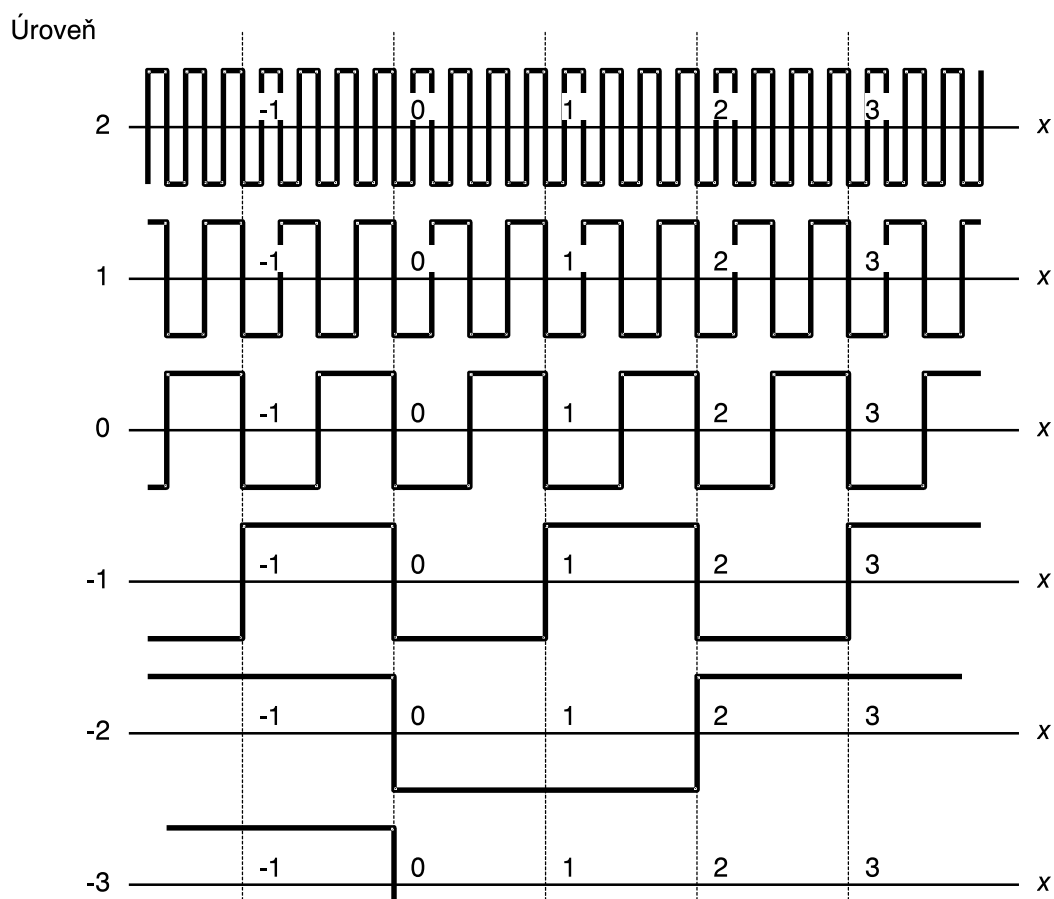
## 2.5 Periodické waveletové transformace

Cíl waveletové transformace je rozložit libovolný signál  $f(x)$  do nekonečné sumy waveletů různých měřítek podle rozvoje

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{j,k} W(2^j x - k). \quad (2.92)$$

Interpretace tohoto rozvoje může být patrná z obr. 2.9.

Zde je pro jednoduchost ukázán Haarův wavelet s  $N = 2$  koeficienty a všechny waveletové amplitudy  $c_{j,k}$  jsou uvažovány jako jednotkové. Diagram ukazuje úrovně  $-3, -2, -1, 0, 1, 2$  odpovídající  $j = -3, -2, -1, 0, 1, 2$ . V úrovni 0 existuje  $2^0 = 1$  Haarův wavelet v každém jednotkovém intervalu; v úrovni 1 existují dva wavelety na jednotkový interval; v úrovni 2 existují čtyři wavelety na jednotkový interval atd. V úrovni  $-1$  existuje jeden wavelet každé dva intervaly; v úrovni  $-2$  existuje jeden wavelet každé čtyři intervaly atd. Z obr. 2.9 je patrné, že pro  $j \leq -1$  je příspěvek každé waveletové úrovně na jednotkovém intervalu konstantní. Z toho plyne, že suma příspěvků ze všech těchto úrovní je také konstantní. V Problému 1 jsme viděli, že škálovací funkce  $\phi(x)$  pro



Obr. 2.9: Haarovy wavelety s jednotkovou amplitudou vykreslené pro úrovně  $-3, -2, -1, 0, 1, 2$ ; pro tyto úrovně existuje  $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4$  wavelety na jednotkový interval.

$N = 2$  koeficientů, což je případ Haarova waveletu, je sama konstantní, takže

$$\phi(x) = 1 \quad 0 \leq x < 1. \quad (2.93)$$

Proto v tomto případě

$$\sum_{j=-\infty}^{-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{j,k} W(2^j x - k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{\phi,k} \phi(x - k), \quad (2.94)$$

kde  $c_{\phi,k}$ ,  $k = -\infty$  až  $\infty$ , je nová množina koeficientů. Podle definice waveletů (2.11 a 2.12) a pro  $j$  záporné, může být  $W(2^j x - k)$  vždy vyjádřeno jako suma členů  $\phi(x - k)$  (viz Problém 5). Proto výsledek (2.94) je obecným výsledkem a tedy rozvoj (2.92) může být zapsán v alternativní podobě :

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{\phi,k} \phi(x - k) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{j,k} W(2^j x - k). \quad (2.95)$$

Vzhledem k velice obecným podmínkám kladeným na  $f(x)$  a  $W(x)$  lze ukázat, že waveletové řady (2.92) a (2.95) konvergují (viz např. Chui [CHUI92a]), takže vytváří užitečnou bázi pro analýzu signálů.

Abychom sestavili algoritmus diskrétní waveletové transformace, je vhodné omezit rozsah nezávisle proměnné  $x$  na jednotkový interval, takže se předpokládá, že  $f(x)$  je definováno pouze pro  $0 \leq x < 1$ . Vzpomeňme si, že  $x$  je bezrozměrná proměnná; je-li např. nezávisle proměnné čas  $t$  a my se zajímáme o signál po dobu  $T$ , potom  $x = t/T$  a  $x$  zaujímá interval  $0 \leq x < 1$ .

Komplikace vyvstanou na okrajích tohoto intervalu, neboť některé wavelety  $W(2^j x - k)$  je přechnívají. Pro definice (2.11) a (2.12) přechnívají přes okraj v  $x = 1$ ; pro alternativní definice analyzujících waveletů mohou některé wavelety přechnívat přes oba okraje. Abychom odstranili takto vzniklé problémy, je vhodné předpokládat, že  $f(x)$ ,  $0 \leq x < 1$ , je jedna perioda periodického signálu

$$F(x) = \sum_k f(x - k), \quad (2.96)$$

kde  $f(x)$  je nulové mimo interval  $0 \leq x < 1$ . Tento předpoklad je stejný jako u diskrétní Fourierovy transformace. Stejně jako u DFT se mohou vyskytovat nespojitosti v  $x = 0$  a  $x = 1$ , které u dostatečně dlouhé realizace signálu prakticky nepřináší vážnější potíže.

Předpokládejme, že používáme wavelet D4; potom  $W(x)$  zaujímá tři jednotkové intervaly,  $0 \leq x < 3$ , (viz obr. 2.6). Na intervalu  $0 \leq x < 1$  bude  $f(x)$  přijímat příspěvky z první třetiny  $W(x)$ , prostřední třetiny  $W(x + 1)$  a poslední třetiny  $W(x + 2)$ . To je stejné, jako když  $W(x)$  *obtočíme* okolo jednotkového intervalu. (Alternativní označení pro *obtočenou*, *zatočenou* funkci je *kruhová* nebo *cyklická* funkce.) Proto, když nějaký wavelet, který začíná na intervalu  $0 \leq x < 1$ , z tohoto intervalu vyběhne v  $x = 1$ , lze předpokládat, že je obtočený okolo intervalu (někdy i několikrát

obtočený, pokud existuje mnoho koeficientů, takže wavelet je rozprostřen přes mnoho intervalů). S tímto předpokladem může být waveletový rozvoj  $f(x)$  (dle vztahu 2.95) na intervalu  $0 \leq x < 1$  zapsán jako

$$f(x) = a_0\phi(x) + a_1W(x) + \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(2x) \\ W(2x-1) \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

$$+ \begin{bmatrix} a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(4x) \\ W(4x-1) \\ W(4x-2) \\ W(4x-3) \end{bmatrix} + \dots + a_{2^j+k}W(2^jx-k) + \dots$$

Koeficienty  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$  udávají amplitudy každého přispívajícího waveletu (po obtočení) k jedné periodě periodické funkce (2.96) na intervalu  $0 \leq x < 1$ . Později uvidíme, že škálovací funkce  $\phi(x)$  je díky „obtočení“ vždy konstantní. Druhý člen  $a_1W(x)$  je wavelet škály nula; třetí a čtvrtý člen  $a_2W(2x)$  a  $a_3W(2x-1)$  jsou wavelety škály jedna, druhý je posunut o  $\Delta x = \frac{1}{2}$  vzhledem k prvnímu; další čtyři členy jsou wavelety škály dvě atd. Čím vyšší škála, tím jemnější detaily a tím více koeficientů existuje, takže ve škále  $j$  existuje  $2^j$  waveletů posunutým navzájem o  $\Delta x = 2^{-j}$  podél  $x$ -ové osy.

Vzhledem k podmínkám ortogonality (2.50) až (2.71) může být obecný koeficient  $a_{2^j+k}$  nalezen násobením vztahu (2.98) členem  $W(2^jx-k)$  a integrací, tj.

$$\int f(x)W(2^jx-k) dx = a_{2^j+k} \int W^2(2^jx-k) dx, \quad (2.98)$$

a tedy

$$a_{2^j+k} = \frac{\int f(x)W(2^jx-k) dx}{\frac{1}{2^j} \int W^2(2^jx-k) dx} = 2^j \int f(x)W(2^jx-k) dx \quad (2.99)$$

vzhledem ke vztahu (2.73).

Obdobně získáme

$$a_0 = \int f(x)\phi(x) dx, \quad (2.100)$$

použijeme-li vztah (2.72).

Meze integrace v podmínkách ortogonality (2.50) až (2.71) jsou dány jako  $-\infty$  a  $+\infty$ , ale integrand je v každém případě nenulový pouze pro konečnou délku požadovaného nejkratšího waveletu nebo škálovací funkce. Pokud wavelety a škálovací funkce nejsou obtočeny, musí být meze integrace ve vztazích (2.99) a (2.100) rozšířeny na několik intervalů. Ale protože předpokládáme, že  $f(x)$  je jednou periodou periodické funkce, která se opakuje v přilehlých intervalech, jsou příspěvky

k integrálům mimo interval  $0 \leq x < 1$  automaticky zahrnuty v integraci od  $x = 0$  do  $x = 1$  *obtočených* funkcí. Proto vzorce (2.99) a (2.100) mohou být zapsány jako

$$a_{2^j+k} = 2^j \int_0^1 f(x)W(2^j x - k) dx \quad (2.101)$$

a

$$a_0 = \int_0^1 f(x)\phi(x) dx, \quad (2.102)$$

pokud se bere v úvahu, že škálovací funkce  $\phi(x)$  a waveletové funkce  $W(2^j x - k)$  ve vztazích (2.98), (2.101) a (2.102) jsou obtočeny okolo intervalu  $0 \leq x < 1$  tolikrát, aby celá jejich délka byla zahrnuta v tomto jednotkovém intervalu. Podmínky ortogonality (2.70) a (2.71) platí i pro obtočené funkce, když jsou meze integrace změněny na  $x = 0$  až 1. Důvod spočívá v tom, že jsou sestrojeny iteračně z funkcí jednotkového pulzu, které jsou ortogonální ke svým vlastním posunutím. Ačkoli se iterační kroky pro obtočený případ liší od iteračním kroků bez obtočení, jsou získány stejné základní výsledky, až na to, že integrace musí pokrývat pouze interval  $0 \leq x < 1$ . Stále je ovšem nezbytné, aby waveletové koeficienty splňovaly podmínky ortogonality dané vztahem (2.47).

## 2.6 Diskrétní waveletové transformace

Diskrétní waveletová transformace (DWT) je algoritmus pro výpočet vztahu (2.101) a vztahu (2.102), je-li  $f(x)$  ekvidistantně vzorkováno na intervalu  $0 \leq x < 1$ , což ztělesňuje předpoklad, že  $f(x)$  je jednou periodou periodického signálu a že škálovací a waveletové funkce se obtáčejí okolo tohoto intervalu, jak je popsáno výše. Po prvotním vytvoření  $\phi(x)$  a  $W(2^j x - k)$  mohou být integrály ve vztazích (2.101) a (2.102) samozřejmě vypočteny s libovolně požadovanou přesností. Avšak pozoruhodnou vlastností algoritmu DWT je právě to, že prvotní vytvoření  $\phi(x)$  a  $W(2^j x - k)$  není nezbytné. Místo toho mohou být konvoluce (2.101) a (2.102) vypočteny i bez explicitního nalezení  $\phi(x)$  a  $W(2^j x - k)$ . Algoritmus DWT objevil Mallat [MALL89] a nazývá se *algoritmus Mallatovy pyramidy* (*Mallat's pyramid algorithm*) nebo někdy *algoritmus Mallatova stromu* (*Mallat's tree algorithm*).

Algoritmus si přiblížíme na jeho inverzi. Předpokládejme, že DWT již byla vypočtena a vygenerovala posloupnost

$$\mathbf{a} = \left[ a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6 \ a_7 \ \dots \ a_{2^j+k} \ \dots \right], \quad (2.103)$$

což jsou koeficienty waveletového rozvoje (2.98). Předpokládejme např., že uvažujeme rozvoj s primární škálovací funkcí  $\phi(x)$  a wavelety se škálami 0, 1 a 2. Potom bude mít  $\mathbf{a}$   $(1 + 1 + 2 + 4) = 2^3$  členů. Abychom zahrnuli všechny wavelety v libovolné škále, musí být celkový počet členů v transformaci vždy mocninou dvou. Uvažujme případ, kdy existuje pouze osm členů, tj.

$$\mathbf{a} = \left[ a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6 \ a_7 \right]. \quad (2.104)$$

První prvek,  $a_0$ , je amplituda škálovací funkce  $\phi(x)$ . Poněvadž  $\phi(x)$  může být vytvořeno iteračně z funkce jednotkového obdélníkového pulzu na intervalu  $0 \leq x < 1$  (viz obr. 2.4),  $a_0\phi(x)$  může být vytvořeno iteračně z funkce obdélníkového pulzu o výšce  $a_0$ . Předpokládejme, že jsme vybrali wavelet se čtyřmi koeficienty. Potom dle vztahu (2.4) je prvním krokem v iteraci

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} [a_0]. \quad (2.105)$$

Počáteční funkce obdélníkového pulzu zaujímá interval  $0 \leq x < 1$ , ale z obr. 2.4 je patrné, že první iterace se rozšíří na interval  $0 \leq x < 2$ . Jestliže část, která leží mimo interval, je zatočena tak, aby padla zpátky do jednotkového intervalu, dostáváme

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} c_0 + c_2 \\ c_1 + c_3 \end{bmatrix} [a_0]. \quad (2.106)$$

Při druhém iteračním kroku, bez zatočení, dostáváme ze vztahu (2.4)

$$\phi_2 = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 & c_0 \\ c_3 & c_1 \\ & c_2 & c_0 \\ & c_3 & c_1 \\ & & c_2 & c_0 \\ & & & c_3 & c_1 \\ & & & & c_2 \\ & & & & & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} [a_0]. \quad (2.107)$$

Ze třetího řádku dolního grafu na obr. 2.4 dostáváme funkci s 10-ti souřadnicemi rozprostřenou na intervalu  $0 \leq x < 2.5$ . Těchto 10 členů je

$$\phi_2 = \begin{bmatrix} c_0^2 \\ c_0 c_1 \\ c_0 c_2 + c_1 c_0 \\ c_0 c_3 + c_1^2 \\ c_1 c_2 + c_2 c_0 \\ c_1 c_3 + c_2 c_1 \\ c_2^2 + c_3 c_0 \\ c_2 c_3 + c_3 c_1 \\ c_3 c_2 \\ c_3^2 \end{bmatrix} [a_0]. \quad (2.108)$$

Zabalením a sečtením členů na stejné pozici v intervalu  $0 \leq x < 1$  se pak získají pouze čtyři členy, které jsou

$$\phi_2 = \begin{bmatrix} c_0^2 + c_1 c_2 + c_2 c_0 + c_3 c_2 \\ c_0 c_1 + c_1 c_3 + c_2 c_1 + c_3^2 \\ c_0 c_2 + c_1 c_0 + c_2^2 + c_3 c_0 \\ c_0 c_3 + c_1^2 + c_2 c_3 + c_3 c_1 \end{bmatrix} [a_0].$$

Vynásobením si můžeme zkontrolovat, že je to stejné jako

$$\phi_2 = \begin{bmatrix} c_0 & c_2 \\ c_1 & c_3 \\ c_2 & c_0 \\ c_3 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 + c_2 \\ c_1 + c_3 \end{bmatrix} [a_0]. \quad (2.109)$$

Povšimněme si, jak je tvořena levá matice:

1. z levé matice vztahu (2.107) se vybere submatice řádu  $4 \times 2$  a
2. prvky  $c_2$  a  $c_3$ , které leží pod touto maticí, se přemístí podle následujícího schématu

$$\begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{c} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{array} \right] \\
 \left[ \begin{array}{c} c_0 \\ c_1 \end{array} \right] \\
 \left[ \begin{array}{c} c_2 \\ c_3 \end{array} \right]
 \end{array}
 \quad (2.110)$$

Tento předpis se použije také pro matici ve vztahu (2.106), která je vytvořena přemístěním stejných dvou prvků

$$\begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{c} c_0 \\ c_1 \end{array} \right] \\
 \left[ \begin{array}{c} c_2 \\ c_3 \end{array} \right]
 \end{array}
 \quad (2.111)$$

Třetí iterační krok se vypočte jako

$$\phi_3 = \begin{bmatrix} c_0 & c_2 \\ c_1 & c_3 \\ c_2 & c_0 \\ c_3 & c_1 \\ c_2 & c_0 \\ c_3 & c_1 \\ c_2 & c_0 \\ c_3 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 & c_2 \\ c_1 & c_3 \\ c_2 & c_0 \\ c_3 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 + c_2 \\ c_1 + c_3 \end{bmatrix} [a_0], \quad (2.112)$$

což na intervalu  $0 \leq x < 1$  vytvoří osm skoků (viz čtvrtý řádek na dolním grafu obr. 2.4) pro zabalenou škálovací funkci.

Pokud revidujeme definice matic waveletových koeficientů  $M$

$$M_1 = \begin{bmatrix} c_0 + c_2 \\ c_1 + c_3 \end{bmatrix} \quad \text{řád } 2 \times 1, \quad (2.113)$$



$$M_2 = \begin{bmatrix} c_0 & c_2 \\ c_1 & c_3 \\ c_2 & c_0 \\ c_3 & c_1 \end{bmatrix} \quad \text{řád } 2^2 \times 2, \quad (2.114)$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} c_0 & & & & c_2 \\ c_1 & & & & c_3 \\ c_2 & c_0 & & & \\ c_3 & c_1 & & & \\ & c_2 & c_0 & & \\ & & c_3 & c_1 & \\ & & & c_2 & c_0 \\ & & & & c_3 & c_1 \end{bmatrix} \quad \text{řád } 2^3 \times 2^2, \quad (2.115)$$

pak algoritmus pro vytvoření příspěvku  $a_0\phi(x)$  k  $f(x)$  je

$$f^\phi(x) = \mathbf{M}_3\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1a_0, \quad (2.116)$$

nebo ve tvaru diagramu

$$a_0 = f^\phi(1) \xrightarrow{\mathbf{M}_1} f^\phi(1:2) \xrightarrow{\mathbf{M}_2} f^\phi(1:4) \xrightarrow{\mathbf{M}_3} f^\phi(1:8), \quad (2.117)$$

kde  $f^\phi(1:8)$  znamená pole osmi prvků, které představuje příspěvek  $a_0\phi(x)$  k  $f(x)$  v  $x = 0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{7}{8}$ .

Vraťme se k posloupnosti (2.104) a uvažujme druhý člen,  $a_1$ . To je amplituda waveletové funkce  $W(x)$ , která se generuje z funkce jednotkového obdélníkového pulsu iteračně, jak je ukázáno na obr. 2.7. Maticové operace pro tvorbu této waveletové funkce jsou stejné jako ty pro generování škálovací funkce  $\phi(x)$ , až na to, že první krok vyžaduje nahrazení

$$\text{vektoru } \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad \text{vektorem } \begin{bmatrix} -c_3 \\ c_2 \\ -c_1 \\ c_0 \end{bmatrix} \quad (2.118)$$

podle vztahu (2.10). Procedura pro zatočení je úplně stejná jako pro škálovací funkci, až na to, že (obdobně vztahu (2.111))

$$\begin{bmatrix} -c_3 \\ c_2 \\ -c_1 \\ c_0 \end{bmatrix} \text{ se stává } \begin{bmatrix} -c_3 \\ c_2 \\ -c_1 \\ c_0 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} -c_3 - c_1 \\ c_2 + c_0 \end{bmatrix}. \quad (2.119)$$

Definujeme-li

$$G_1 = \begin{bmatrix} -c_3 - c_1 \\ c_2 + c_0 \end{bmatrix},$$

bude algoritmus pro generování příspěvku  $a_1 W(x)$  k  $f(x)$

$$f^{(0)}(1 : 8) = \mathbf{M}_3 \mathbf{M}_2 \mathbf{G}_1 a_1, \quad (2.120)$$

nebo ve tvaru diagramu

$$a_1 = f^{(0)}(1) \xrightarrow{G_1} f^{(0)}(1 : 2) \xrightarrow{M_2} f^{(0)}(1 : 4) \xrightarrow{M_3} f^{(0)}(1 : 8). \quad (2.121)$$

Třetí člen ve vztahu (2.104),  $a_2$ , je amplituda  $W(2x)$ . Místo intervalu  $0 \leq x < 3$ , jako u  $W(x)$  na obr. 2.7, zaujímá pouze interval  $0 \leq x < 3/2$ , jak je znázorněno na obr. 2.10.

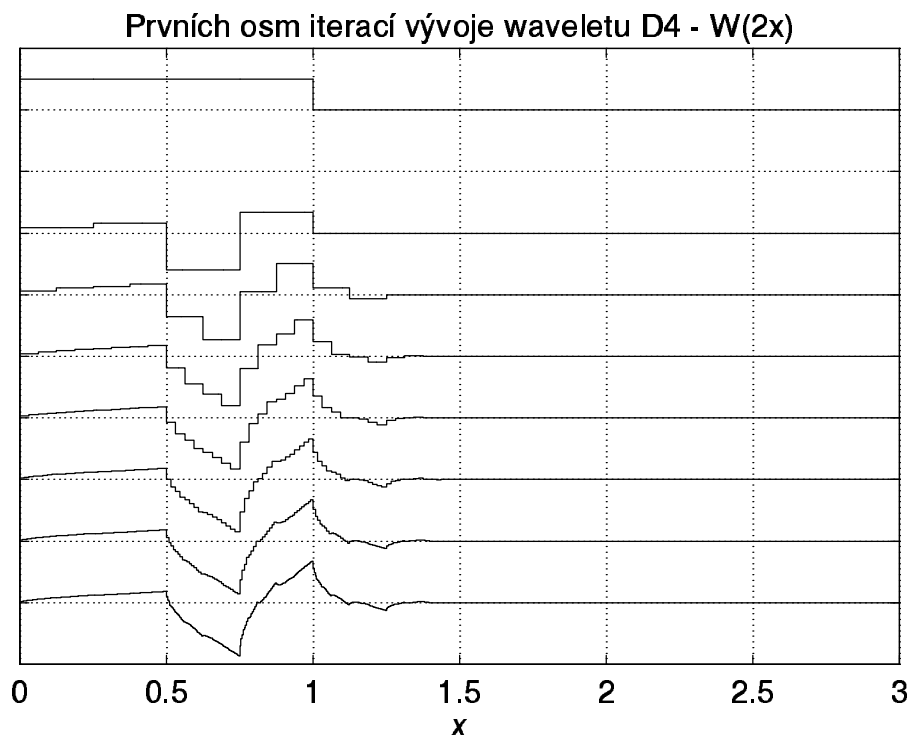
Místo druhé iterace

$$\begin{bmatrix} c_0 & c_2 \\ c_1 & c_3 \\ c_2 & c_0 \\ c_3 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c_3 - c_1 \\ c_2 + c_0 \end{bmatrix} [a_2], \quad (2.122)$$

první operace je vynechána a jdeme přímo na

$$\begin{bmatrix} -c_3 \\ c_2 \\ -c_1 \\ c_0 \end{bmatrix} [a_2] \quad (2.123)$$

jako v obr. 2.10. Poté iterace pokračuje jako předtím a my dostaneme



Obr. 2.10: Generování (nezatočeného) waveletu  $W(2x)$  z jednotkového signálu s vynecháním prvního iteračního kroku (porovnejte s obr. 2.7).

$$f^{(1,1)}(1 : 8) = \mathbf{M}_3 \begin{bmatrix} -c_3 \\ c_2 \\ -c_1 \\ c_0 \end{bmatrix} [a_2]. \quad (2.124)$$

Čtvrtý člen ve vztahu (2.104),  $a_3$ , je amplituda transformovaného waveletu  $W(2x - 1)$ . Ten je transformován tak, že zabírá interval  $0.5 \leq x < 2$ . Pokud umožníme zabalení, je procedura pro výpočet příspěvku k  $f(x)$  úplně stejná jako pro  $a_2$ , až na to, že prvky v první matici jsou přemístěné

$$\begin{bmatrix} -c_1 \\ c_0 \\ -c_3 \\ c_2 \end{bmatrix}, \quad (2.125)$$

takže dostáváme

$$f^{(1,2)}(1 : 8) = \mathbf{M}_3 \begin{bmatrix} -c_1 \\ c_0 \\ -c_3 \\ c_2 \end{bmatrix} [a_3]. \quad (2.126)$$

Kombinací vztahu (2.124) a (2.126) potom dostáváme

$$f^{(1)}(1 : 8) = \mathbf{M}_3 \begin{bmatrix} -c_3 & -c_1 \\ c_2 & c_0 \\ -c_1 & -c_3 \\ c_0 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad (2.127)$$

nebo vložením

$$\mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} -c_3 & & & \\ & c_2 & & \\ -c_1 & -c_3 & & \\ & c_0 & c_2 & \\ \hline & -c_1 & & \\ & c_0 & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_3 & -c_1 \\ c_2 & c_0 \\ -c_1 & -c_3 \\ c_0 & c_2 \end{bmatrix} \quad (2.128)$$

dostáváme

$$f^{(1)}(1 : 8) = \mathbf{M}_3 \mathbf{G}_2 \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (2.129)$$

a ve formě diagramu

$$\begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{G}_2} f^{(1)}(1 : 4) \xrightarrow{\mathbf{M}_3} f^{(1)}(1 : 8). \quad (2.130)$$

Zbývající čtyři prvky vztahu (2.104),  $a_4$ ,  $a_5$ ,  $a_6$ ,  $a_7$ , jsou amplitudy waveletů  $W(4x)$ ,  $W(4x - 1)$ ,  $W(4x - 2)$  a  $W(4x - 3)$ , které jsou navzájem posunuté o  $\Delta x = \frac{1}{4}$ . V tomto případě jsou první dva kroky iterace v obr. 2.7 vynechány a pro osmičlennou posloupnost tak existuje pouze jeden krok ve výpočtu. Na intervalu  $0 \leq x < 1$  existuje osm bodů, takže každý wavelet je posunut o dvě pozice vzhledem ke svému sousedu. Každý wavelet má prvky  $[-c_3 \ c_2 \ -c_1 \ c_0]^T$ , takže výpočet lze vyjádřit jako

$$f^{(2)}(1 : 8) = \begin{bmatrix} -c_3 & & & & & & & -c_1 \\ & c_2 & & & & & & c_0 \\ -c_1 & -c_3 & & & & & & \\ & c_0 & c_2 & & & & & \\ & & & -c_1 & -c_3 & & & \\ & & & c_0 & c_2 & & & \\ & & & & & -c_1 & -c_3 & \\ & & & & & c_0 & c_2 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{bmatrix}, \quad (2.131)$$

nebo ve formě diagramu

$$\begin{bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{G}_3} f^{(2)}(1 : 8). \quad (2.132)$$

Konečně kombinací čtyř diagramů (2.117), (2.121), (2.130) a (2.132) lze vyjádřit výsledek, že

$$f(1 : 8) = f^\phi(1 : 8) + f^{(0)}(1 : 8) + f^{(1)}(1 : 8) + f^{(2)}(1 : 8). \quad (2.133)$$

Konečný diagram vypadá následovně :

$$\begin{array}{ccccccc} f'(1) & \xrightarrow{\mathbf{M}_1} & f'(1 : 2) & \xrightarrow{\mathbf{M}_2} & f'(1 : 4) & \xrightarrow{\mathbf{M}_3} & f(1 : 8) = f, \\ \uparrow & & \mathbf{G}_1 \uparrow & & \mathbf{G}_2 \uparrow & & \mathbf{G}_3 \uparrow \\ \mathbf{a} = [\mathbf{a}(1) & & \mathbf{a}(2) & & \mathbf{a}(3 : 4) & & \mathbf{a}(5 : 8)] \end{array} \quad (2.134)$$

kde  $a(1) = a_0$ ,  $a(2) = a_1$ ,  $a(3 : 4) = [a_2 \ a_3]^T$  a  $a(5 : 8) = [a_4 \ a_5 \ a_6 \ a_7]^T$ .

Toto je inverzní algoritmus Mallatova stromu [MALL89]. Jak je nakresleno výše, strom je poražen, protože kmen je vodorovný! Kořeny stromu jsou na pravé straně rovnice a větve jsou svislé; u kořene je mnoho větví a směrem k vrcholu stromu jich ubývá, až větev na samém vrcholu stromu (předtím než byl poražen) se natahuje k prvnímu koeficientu waveletové transformace  $a(1)$ .

Tento algoritmus je implementován v souboru *iwavedn(a,N)*, který je uveden v Dodatku. Program vezme libovolné pole  $a$  délky  $2^n$ , kde  $a$  představuje waveletovou transformaci a  $n$  je libovolné celé číslo větší než nula, a vypočte funkci  $f(r)$ ,  $r = 1$  až  $2^n$ . Výpočet se provádí pro wavelet s  $N$  koeficienty ( $N$  sudé), které jsou importovány ze samostatného souboru *dcoeffs(N)* ( $N \leq 20$ ). Experimenty s tímto programem jsou popsány v Problému 5, 6 a 7.

Nyní uvažujme jak rozdělit libovolnou funkci  $f(1 : 2^n)$  do její waveletové transformace  $a(1 : 2^n)$ . Vzhledem k podmínkám kladeným na waveletové koeficienty pro zajištění vzájemné ortogonality waveletů a jejich škálovací funkce, je zřejmé, že matice  $\mathbf{M}$  jsou ortogonální matice. Důsledky plynoucí z ortogonality matice  $\mathbf{M}$  se nezmění přeorganizováním matic v důsledku otočení. Z důvodu podmínek ortogonality (2.47) a (2.56) máme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathbf{M}_r^T \mathbf{M}_r &= \mathbf{I} & \mathbf{M}_r^T \mathbf{G}_r &= 0 \\ \mathbf{G}_r^T \mathbf{M}_r &= 0 & \frac{1}{2} \mathbf{G}_r^T \mathbf{G}_r &= I, \end{aligned} \quad (2.135)$$

jak lze snadno ověřit substitucí pro typický řádek matice  $\mathbf{M}_r^T$

$$[2i \text{ nul}] \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots \end{bmatrix} [2j \text{ nul}] \quad (2.136)$$

a odpovídající sloupce matice  $\mathbf{M}_r$

$$\left[ [2(i+m) \text{ nul}] \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots \end{bmatrix} [2(j-m) \text{ nul}] \right]^T \quad (2.137)$$

a stejně pro  $\mathbf{G}_r$ , např. sloupec

$$\left[ [2(i+m) \text{ nul}] \begin{bmatrix} -c_N & c_{N-1} & -c_{N-2} & \cdots \end{bmatrix} [2(j-m) \text{ nul}] \right]^T \quad (2.138)$$

a vynásobením za použití vztahů (2.47) a (2.56).

Pokud pro transpozici  $\mathbf{G}$  a  $\mathbf{M}$  definujeme nové symboly  $\mathbf{H}$  a  $\mathbf{L}$

$$\mathbf{H} = \mathbf{G}^T \quad \text{a} \quad \mathbf{L} = \mathbf{M}^T, \quad (2.139)$$

potom vzhledem ke vztahu (2.135) dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathbf{L}\mathbf{M} &= \mathbf{I} & \mathbf{L}\mathbf{G} &= 0 \\ \mathbf{H}\mathbf{M} &= 0 & \frac{1}{2}\mathbf{H}\mathbf{G} &= \mathbf{I}, \end{aligned} \quad (2.140)$$

kde jsou rozměry matic následující :

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_r &= \mathbf{G} (2^r \times 2^{r-1}) & \mathbf{H}_r &= \mathbf{H} (2^{r-1} \times 2^r) \\ \mathbf{L}_r &= \mathbf{L} (2^{r-1} \times 2^r) & \mathbf{M}_r &= \mathbf{M} (2^r \times 2^{r-1}). \end{aligned} \quad (2.141)$$

Vzhledem ke vztahům (2.140) může být každý krok vedoucí ke stromovému algoritmu (2.134) jednoduše obrácen. Např. ze vztahu (2.116) dostaneme

$$a_0 = \frac{1}{2}\mathbf{L}_1 \frac{1}{2}\mathbf{L}_2 \frac{1}{2}\mathbf{L}_3 f^\phi. \quad (2.142)$$

Uvažujme nahrazení  $f^\phi$  za  $f$ , kde

$$f = f^\phi + f^{(0)} + f^{(1)} + f^{(2)} \quad (2.143)$$

a výpočet

$$\frac{1}{2}\mathbf{L}_1 \frac{1}{2}\mathbf{L}_2 \frac{1}{2}\mathbf{L}_3 f. \quad (2.144)$$

Substitucí vztahu (2.120) za  $f^{(0)}$ , (2.129) za  $f^{(1)}$  a (2.132) za  $f^{(2)}$  dostaneme

$$f = f^\phi + \mathbf{M}_3\mathbf{M}_2\mathbf{G}_1 [a_1] + \mathbf{M}_3\mathbf{G}_2 \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \mathbf{G}_3 \begin{bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{bmatrix}. \quad (2.145)$$

Potom vzhledem ke vztahu (2.140)

$$\frac{1}{2}\mathbf{L}_1\frac{1}{2}\mathbf{L}_2\frac{1}{2}\mathbf{L}_3f = \frac{1}{2}\mathbf{L}_1\frac{1}{2}\mathbf{L}_2\frac{1}{2}\mathbf{L}_3f^\phi + 0 + 0 + 0. \quad (2.146)$$

Z toho lze usuzovat, že  $f^\phi$  ve vztahu (2.142) může být nahrazeno  $f$ , takže

$$a_0 = \frac{1}{2}\mathbf{L}_1\frac{1}{2}\mathbf{L}_2\frac{1}{2}\mathbf{L}_3f. \quad (2.147)$$

Podobné závěry platí i pro ostatní kroky, takže místo vztahu (2.120) dostaneme

$$a_1 = \frac{1}{2}\mathbf{H}_1\frac{1}{2}\mathbf{L}_2\frac{1}{2}\mathbf{L}_3f, \quad (2.148)$$

místo vztahu (2.129)

$$\begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\mathbf{H}_2\frac{1}{2}\mathbf{L}_3f \quad (2.149)$$

a místo vztahu (2.132)

$$\begin{bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\mathbf{H}_3f. \quad (2.150)$$

Tedy celý stromový algoritmus může být převrácen, takže ze vztahu (2.134) dostaneme

$$\begin{array}{ccccccc} f'(1) & \xleftarrow{\frac{1}{2}\mathbf{L}_1} & f'(1:2) & \xleftarrow{\frac{1}{2}\mathbf{L}_2} & f'(1:4) & \xleftarrow{\frac{1}{2}\mathbf{L}_3} & f(1:8) = f \\ \downarrow & & \frac{1}{2}\mathbf{H}_1 \downarrow & & \frac{1}{2}\mathbf{H}_2 \downarrow & & \frac{1}{2}\mathbf{H}_3 \downarrow \\ \mathbf{a} = [\mathbf{a}(1) & & \mathbf{a}(2) & & \mathbf{a}(3:4) & & \mathbf{a}(5:8)] \end{array} \quad (2.151)$$

Toto je Mallatův algoritmus pro diskrétní waveletovou transformaci [MALL89] a slouží pro velice efektivní transformaci signálu  $f(1:2^n)$  na jeho waveletové koeficienty  $a(1:2^n)$ . Označení  $\mathbf{L}$  a  $\mathbf{H}$  bylo zavedeno s ohledem na skutečnost, že  $\mathbf{L}$  může být interpretováno jako filtr typu dolní propusti (low-pass filter) a  $\mathbf{H}$  jako filtr typu horní propusti (high-pass filter) [NEWL94a, STRA89].  $\mathbf{H}$  propouští v každé úrovni jemnou strukturu, která vytváří waveletové koeficienty;  $\mathbf{L}$  dává postupně hrubší reprezentaci signálu, tak jak mizí jeho jemná struktura. Tento proces je ukázán v následujícím příkladu:

*Příklad*

Nalezněte ručním výpočtem waveletovou transformaci posloupnosti  $[-9, -7, 4, 4, 4, 12, 2, 6]$  za použití Haarova waveletu, pro který  $c_0 = c_1 = 1$ . Pro tento nejjednodušší wavelet zůstává škálovací

funkce jednotkovým obdélníkovým pulzem a wavelet je ve tvaru dvou obdélníkových pulzů poloviční šířky s opačnými znaménky. Jestliže je wavelet generován iteračně podle schématu na obr. 2.7, jeho tvar se následnými kroky nemění. Transformační matice jsou

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{L}_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{L}_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & \\ & & 1 & 1 & & \\ & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & 1 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.152}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}_1 &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{H}_2 &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{H}_3 &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & & \\ & & -1 & 1 & & \\ & & & & -1 & 1 \\ & & & & & & -1 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.153}$$

Protože existují pouze dva koeficienty, neexistují v maticích žádné obtočené členy. Maticové operace ve stromovém algoritmu (2.151) potom dávají

$$\frac{1}{2}\mathbf{H}_3 f = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & & \\ & & -1 & 1 & & \\ & & & & -1 & 1 \\ & & & & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 \\ -7 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 12 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{bmatrix}$$



$$\frac{1}{2}\mathbf{L}_3 f = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & 1 & & & \\ & & & & & & 1 & 1 & \\ & & & & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & & & & & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 \\ -7 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 12 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\mathbf{H}_2 \frac{1}{2}\mathbf{L}_3 f = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & \\ & & -1 & 1 & \\ & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\mathbf{L}_2 \frac{1}{2}\mathbf{L}_3 f = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\mathbf{H}_1 \frac{1}{2}\mathbf{L}_2 \frac{1}{2}\mathbf{L}_3 f = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix} = [4] = [a_1]$$

$$\frac{1}{2}\mathbf{L}_1 \frac{1}{2}\mathbf{L}_2 \frac{1}{2}\mathbf{L}_3 f = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix} = [2] = [a_0] \tag{2.154}$$

take transformace je

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & -2 & 1 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Tyto výsledky znázorňuje obr. 2.11. V horním obrázku je znázorněn rozvoj (2.143), kde

$$f^{(\phi)} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad f^{(0)} = 4 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad f^{(1)} = 6 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad -2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

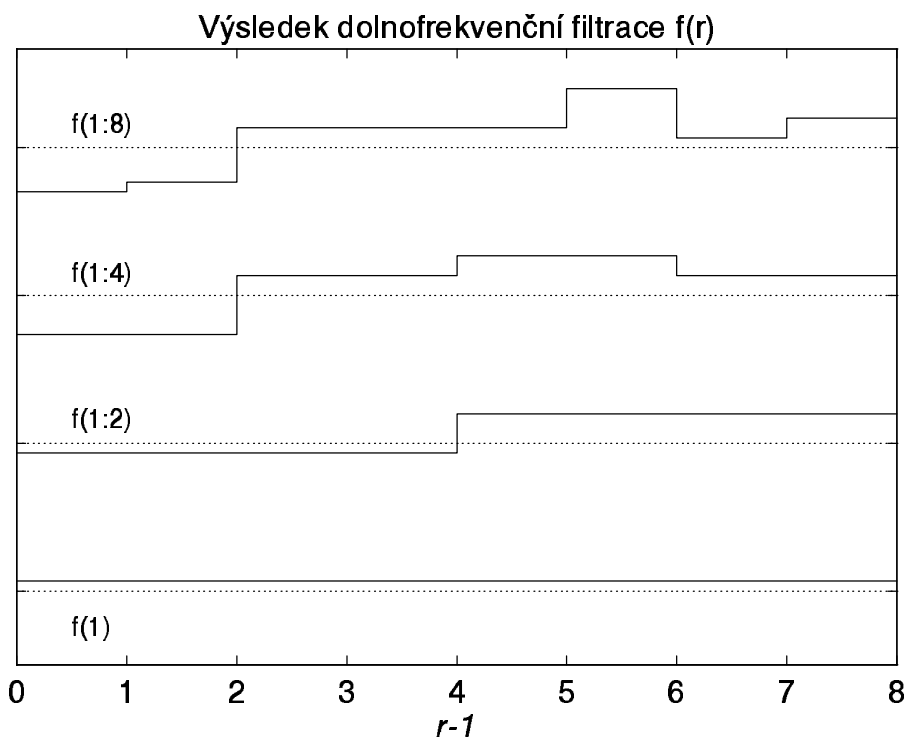
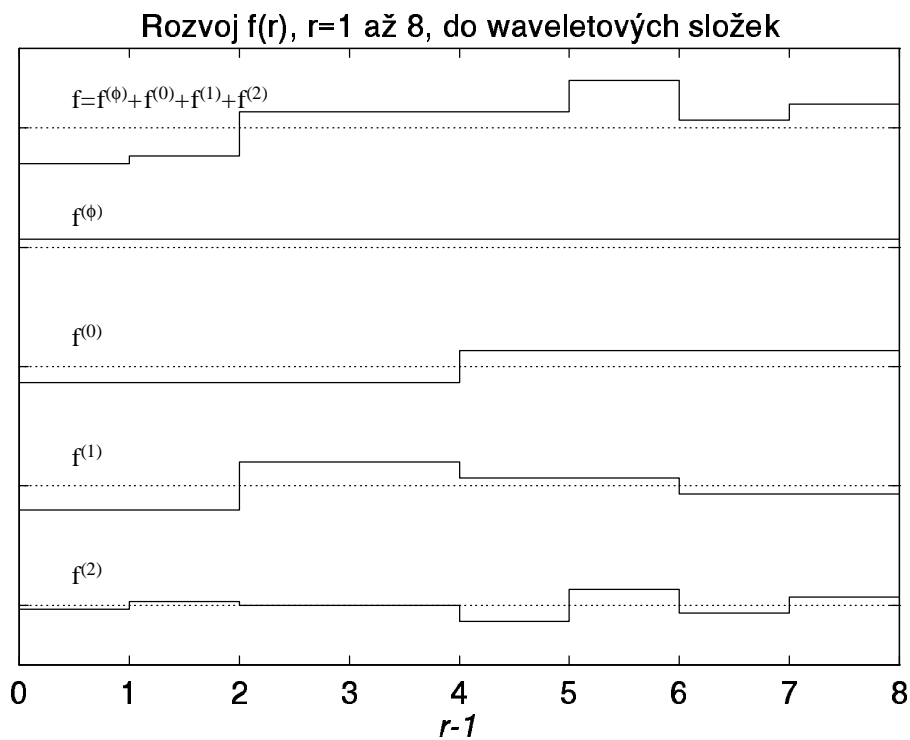
a

$$f^{(2)} = 1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} . \quad (2.155)$$

Výsledky dolnofrekvenční filtrace  $f$ , které se vyskytují na kmeni stromu, jsou uvedeny v dolním grafu obr. 2.11. Natažením filtrovaných posloupností a jejich vykreslením na společné základně je patrný vzájemný vztah mezi operacemi dolní a horní filtrace. Odečtením  $f^{(2)}$  v horním grafu od  $f(1 : 8)$  v dolním grafu se získá  $f(1 : 4)$ ; odečtením  $f^{(1)}$  od  $f(1 : 4)$  se získá  $f(1 : 2)$ ; odečtením  $f^{(0)}$  od  $f(1 : 2)$  se získá  $f(1)$  v dolním grafu. Tedy v každém stupni transformace jsou waveletové koeficienty vytvářeny filtrací vysokofrekvenčních složek a zbytkový signál prochází stromem dále k následující filtraci v dalším hrubším měřítku.

V Dodatku je uveden soubor  $wavedn(f, N)$ , který vezme pole  $f(1 : 2^n)$  a vypočte jeho waveletovou transformaci  $a(1 : 2^n)$ , kde  $n$  je libovolné celé číslo  $n \geq 1$  a  $N$  je požadovaný počet waveletových koeficientů ( $N$  sudé).

DWT, založená na stromovém algoritmu, je výpočetně velice efektivní. Pro počáteční pole délky  $2^n = M$  vyvolá první dolnofrekvenční filtrování  $\frac{1}{2}M \times N$  násobení, kde  $N$  je počet waveletových koeficientů. Stejný počet násobení vyvolá i první hornofrekvenční filtrování, takže v první úrovni transformace bude  $M \times N$  násobení;  $\frac{1}{2}M \times N$  násobení ve druhé úrovni atd. Při zanedbání redukce, která plyne z překrývání waveletových koeficientů navzájem, bude celkově  $(2M - 1)N$  násobení. Jinak je počet operací přibližně úměrný  $M$ . U FFT činí počet operací  $M \log_2 M$ . Počet operací se zvětšuje úměrně k počtu waveletových koeficientů, ale to vede zase k větší přesnosti ve waveletovém rozvoji (2.98) a k waveletům, jejichž vlastnosti jsou bližší harmonickým funkcím.



Obr. 2.11: Příklad používající Haarův wavelet k demonstraci práce Mallatova algoritmu.

## 2.7 Vlastnosti DWT

Jak stoupá počet waveletových koeficientů, stává se wavelet hladší a více se podobá harmonické funkci pozorované přes hladké okénko. Obr. 2.12 znázorňuje wavelety s 2, 4, 14 a 20 koeficienty

vykreslené vedle sebe pro porovnání. Wavelet s 20 koeficienty ještě stále vykazuje některé zbytkové nepravidelnosti, jak lze vidět v pravé části obr. 2.13.

Wavelety na obr. 2.12 jsou dlouhé  $2^9 = 512$  vzorků a jsou získány výpočtem IDWT posloupnosti  $a(1 : 512)$ , ve které jsou všechny prvky nulové kromě prvku  $a(33) = 1$ . Porovnáním s rozvojem (2.98) vyplývá, že  $a(1)$  je koeficient  $a_0$ ,  $a(2)$  je  $a_1$ , atd. až  $a(33)$  je koeficient  $a_{32}$ . Toto je první z množiny 16-ti prvků, které definují příspěvky waveletů  $W(16x - k)$ . Na celém intervalu jich existuje 32,  $k = 0$  až 31, z nichž každý je posunut o  $512/32 = 16$  bodů. Šířka každého waveletu závisí na počtu jeho koeficientů; jestliže existuje  $N$  koeficientů, je wavelet široký  $N - 1$  intervalů. Tedy wavelet D2 zaujímá 1 interval, nebo-li 16 bodů na obr. 2.12; wavelet D8 zaujímá 7 intervalů, nebo-li  $7 \times 16 = 112$  bodů; wavelet D14 zaujímá 13 intervalů, nebo-li  $13 \times 16 = 208$  bodů a wavelet D20 zaujímá 19 intervalů, nebo-li  $19 \times 16 = 304$  bodů. Na obr. 2.13 je uveden výsledek stejného výpočtu pro wavelet D20, ale pro posloupnost délky  $2^{13} = 8192$  bodů. V tomto případě je délka intervalu pro  $W(16x - k)$   $8192/32 = 256$  bodů, takže celá délka waveletu D20  $W(16x)$  na obr. 2.13 zabírá  $19 \times 256 = 4864$  bodů. Amplituda  $W(16x)$  je mimo rozsah uvedený na obr. 2.13 velice malá, jak je vidět z menšího pohledu na obr. 2.12.

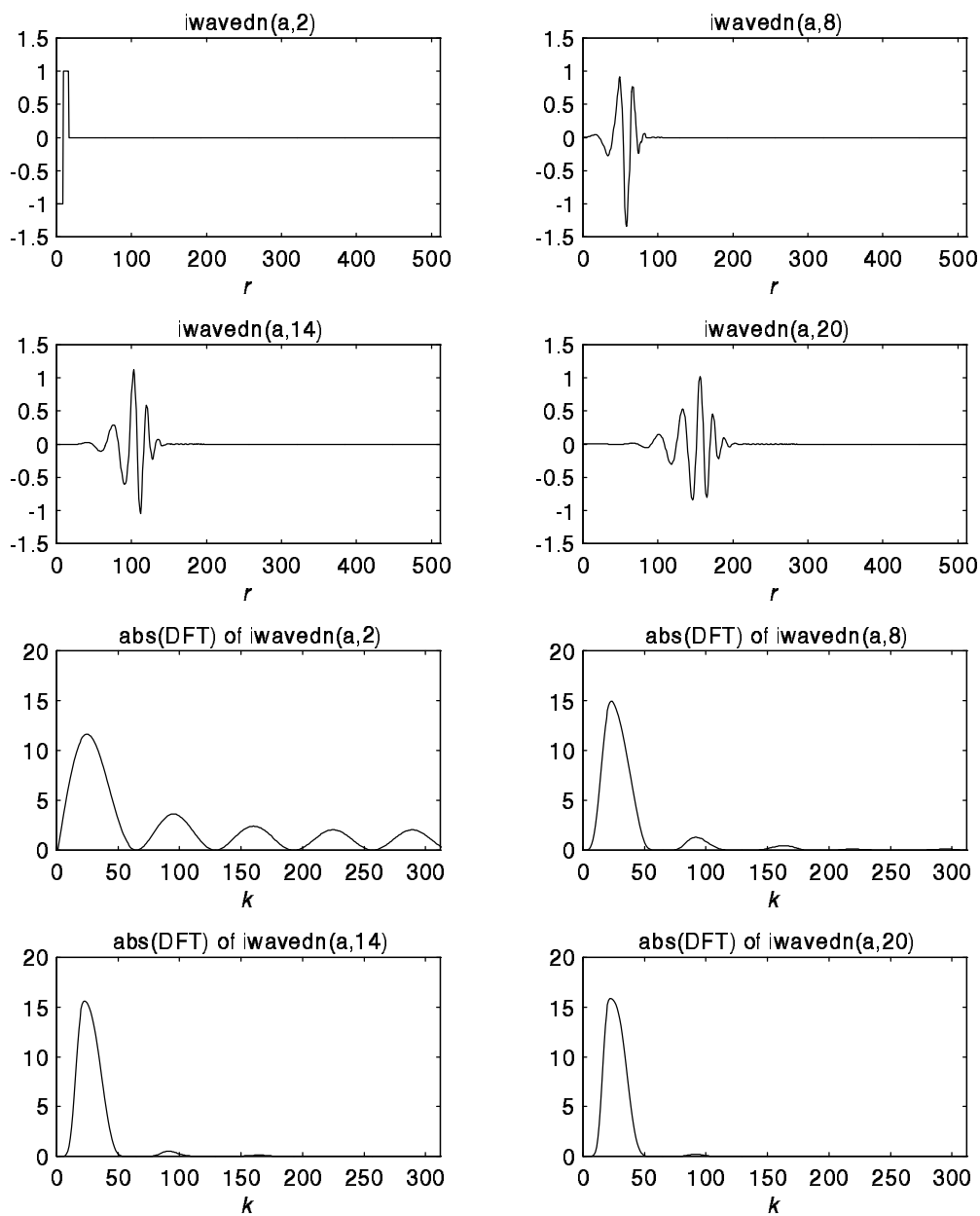
Na obr. 2.12 je též uveden modul diskrétní Fourierovy transformace výše zmíněných waveletů. Jelikož je DFT symetrická, jsou znázorněny pouze hodnoty v intervalu od 1 do  $512/2 = 256$ . I pro wavelet D20 není hlavní frekvenční špička ostrá a ve vyšších frekvencích se vyskytují rozeznatelné hrbolky. Pro porovnání, transformace harmonické funkce pozorované přes Gaussovo okénko má pouze jednu Gaussovou špičku (viz Problém 7). Protože jsou dilatační wavelety kompaktní (v tom smyslu, že mají definovaný začátek a konec na  $x$ -ové ose), nemohou být kompaktní zároveň na frekvenční ose, takže jejich Fourierovy transformace jsou rozprostřeny po celé frekvenční ose. Harmonické wavelety, které budou probrány později, jsou navrženy tak, aby byly kompaktní ve frekvenční oblasti, ale zaujímají zase nekonečný rozsah na  $x$ -ové oblasti.

Obr. 2.14 znázorňuje graf podobný tomu na obr. 2.12, až na to, že jsou zahrnuty všechny wavelety v úrovni 6, takže místo  $a(33) = 1$ , máme tentokrát nenulové prvky  $a(33 : 64)$ . Potom existuje série podobných překrývajících se waveletů vzdálených od sebe o 16 bodů. Modul Fourierových transformací těchto signálů je vykreslen dole; tentokrát je na svislé ose použito logaritmického měřítka. Převládající frekvence je frekvence jednoho cyklu na každých 16 bodů, kterou lze určit z horizontálního měřítka.

Obr. 2.15 znázorňuje v horní polovině čtyři současné záznamy vibrací. Jedná se o vibrace v budově postavené těsně u podzemní dráhy. Budova je nad svým přízemím izolovaná, aby se vibrace ve vyšších poschodích redukovaly. Vzorkovací frekvence digitálního záznamu byla 1667 Hz a před vzorkováním byly vysokofrekvenční složky odstraněny dolnofrekvenčním filtrem s mezním kmitočtem 500 Hz.

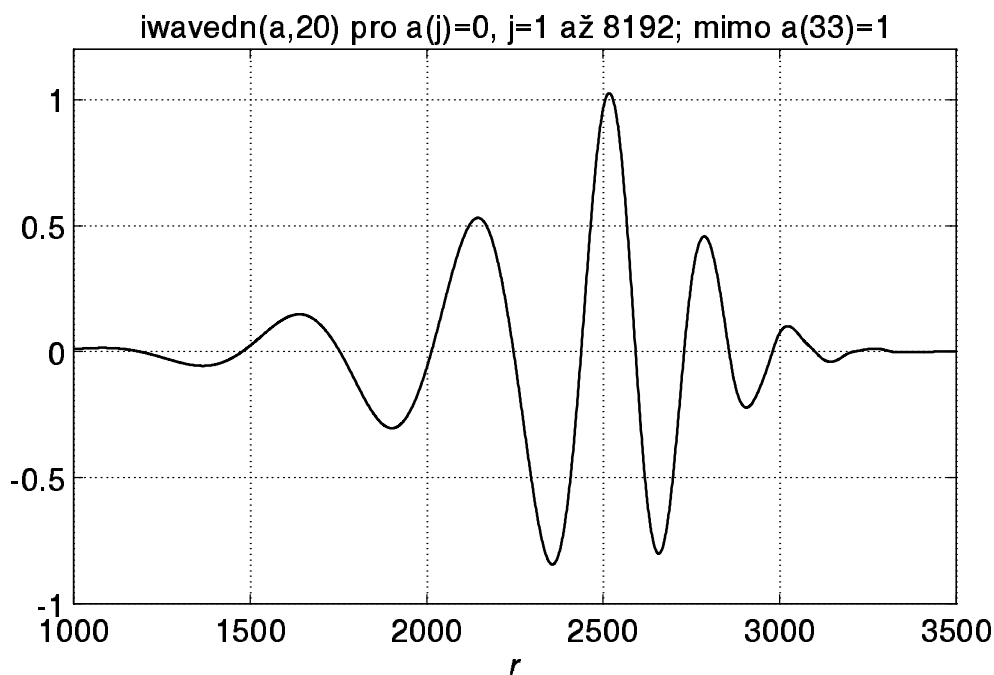
Záznamy mezi suterénem, přízemím a prvním patrem jsou fázově posunuty o  $(1/6)(1/1667) = 10^{-4}$  s a mezi prvním a čtvrtým patrem o  $3 \times 10^{-4}$  s, ale to nemá vliv na následnou analýzu. Data v horní polovině obr. 2.15 mají délku 2048, tedy pokrývají časovou dobu  $2048/1667 \cong 1.2$  s. Dolní polovina obr. 2.15 znázorňuje waveletovou (D20) transformaci horních signálů. Přiřazení jednotlivých prvků transformace  $a(1 : 2048)$  k příslušným úrovním je uvedeno v tab. 2.1.

$a(j)=0, j=1$  až 512, mimo  $a(33)=1$



Obr. 2.12: Wavelety  $W(16x)$  s 2, 8, 14 a 20 koeficienty pro posloupnost délky 512 vzorků; jim odpovídající diskrétní Fourierovy transformace jsou zobrazeny dole.

Obr. 2.16 ukazuje pro porovnání rekonstruované signály z úrovně 4 a 5. Rekonstruovaný signál z úrovně 4 se získá výpočtem IDWT posloupnosti  $a(1 : 2048)$ , kde jsou všechny prvky nulové kromě prvků  $a(17 : 32)$ , které jsou nastaveny na hodnoty z úrovně 4 původní DWT (viz tab. 2.1). Pro úroveň 5 jsou všechny prvky nulové kromě prvků  $a(33 : 64)$ , které jsou nastaveny na hodnoty z úrovně 5 původní DWT. Je zřejmé, že v těchto frekvenčních rozsazích existuje významná korelace mezi suterénem a přízemím a mezi prvním a čtvrtým patrem. Frekvenční rozsah pro úroveň 4 je dán



Obr. 2.13: Část waveletu  $W(16x)$  (D20) pro posloupnost délky 8192 vzorků; celý wavelet zabírá 19 intervalů od 1 do  $19(8192/32) = 4864$ .

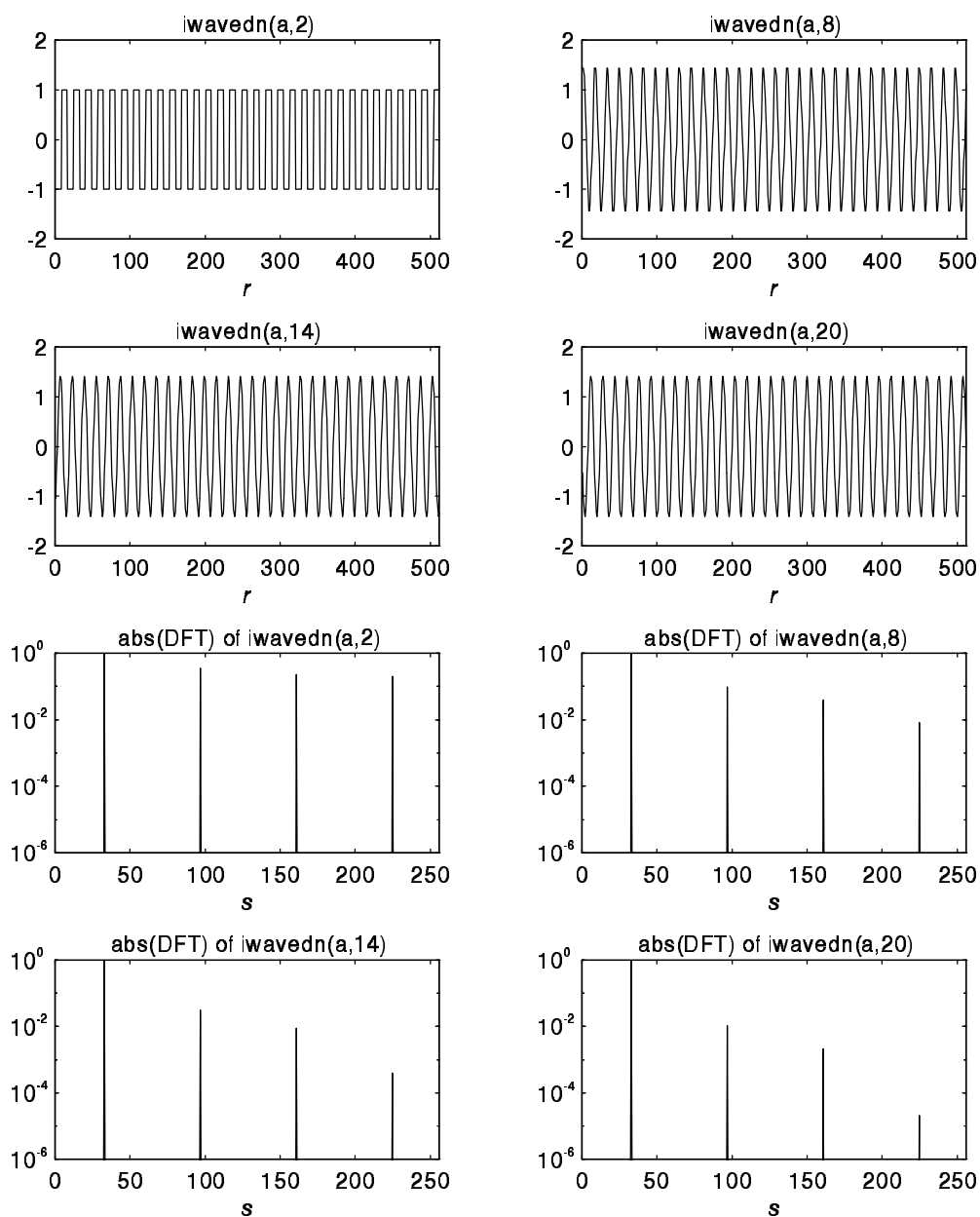
16 cyklů po dobu  $2048/1667$  s, což odpovídá frekvenci  $16(1667/2048) \cong 13$  Hz; pro úroveň 5 je to dvakrát tolik, tedy 26 Hz. Obr. 2.17 znázorňuje obdobné výsledky pro úrovně 8 a 9. Zde je korelace mezi rekonstruovanými signály velice malá. Frekvenční rozsah pro úroveň 8 je  $256(1667/2048) \cong 208$  Hz; pro úroveň 9 je to asi 416 Hz. Vysvětlení tohoto chování je následující: odpružená budova má tendenci pohybovat se při nízkých frekvencích jako

jeden kus (tuhé těleso). Při vyšších frekvencích se struktura stává vícemodální a záznamy vibrací

Úroveň	Prvky transformace	# waveletů	Popis	Vzdálenost	Délka waveletu
-1	a(1)	žádný	$\phi(x)$	-	-
0	a(2)	1	$W(x)$	2048	$19 \times 2048 = 38912$
1	a(3:4)	2	$W(2x - k)$	1024	19456
2	a(5:8)	4	$W(4x - k)$	512	9728
3	a(9:16)	8	$W(8x - k)$	256	4864
4	a(17:32)	16	$W(16x - k)$	128	2432
5	a(33:64)	32	$W(32x - k)$	64	1216
6	a(65:128)	64	$W(64x - k)$	32	608
7	a(129:256)	128	$W(128x - k)$	16	304
8	a(257:512)	256	$W(256x - k)$	8	152
9	a(513:1024)	512	$W(512x - k)$	4	76
10	a(1025:2048)	1024	$W(1024x - k)$	2	$19 \times 2 = 38$

Tab. 2.1: Identifikace transformačních úrovní pro D20

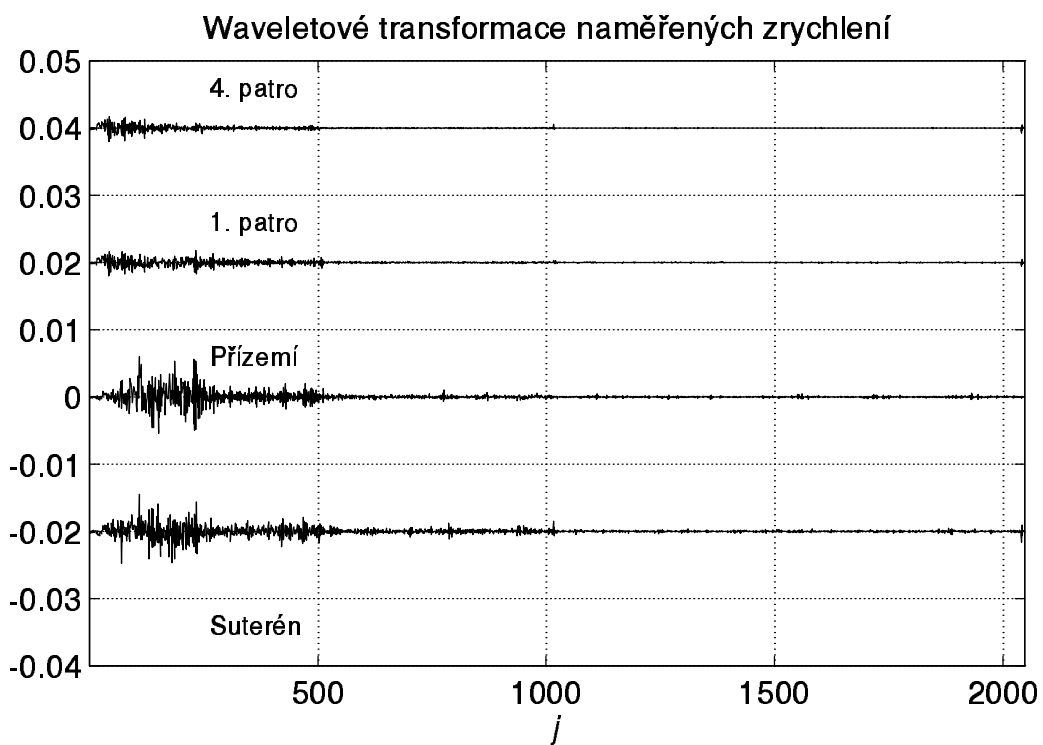
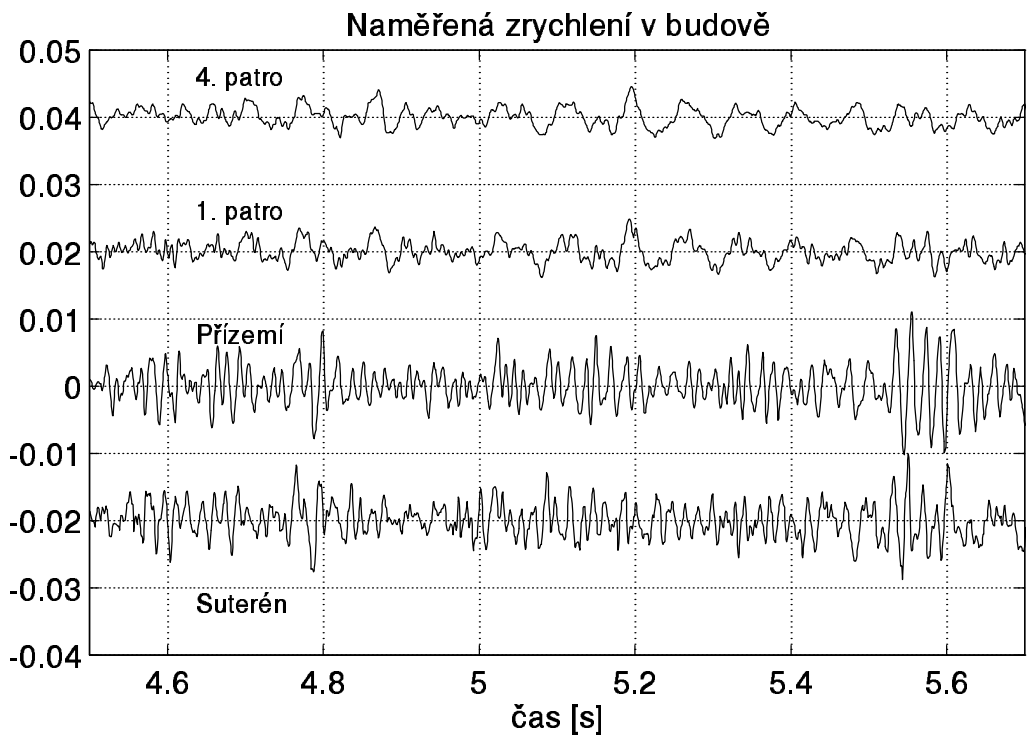
$a(j)=0, j=1$  až 32 a 65 až 512;  $a(j)=1, j=33$  až 64



Obr. 2.14: Wavelety  $W(16x - k)$  s 2, 8, 14 a 20 koeficienty pro posloupnost délky 512 vzorků pro  $k = 0$  až 32; jim odpovídající diskrétní Fourierovy transformace jsou zobrazeny dole.

jsou velice citlivé na umístění snímačů měřících vibrace.

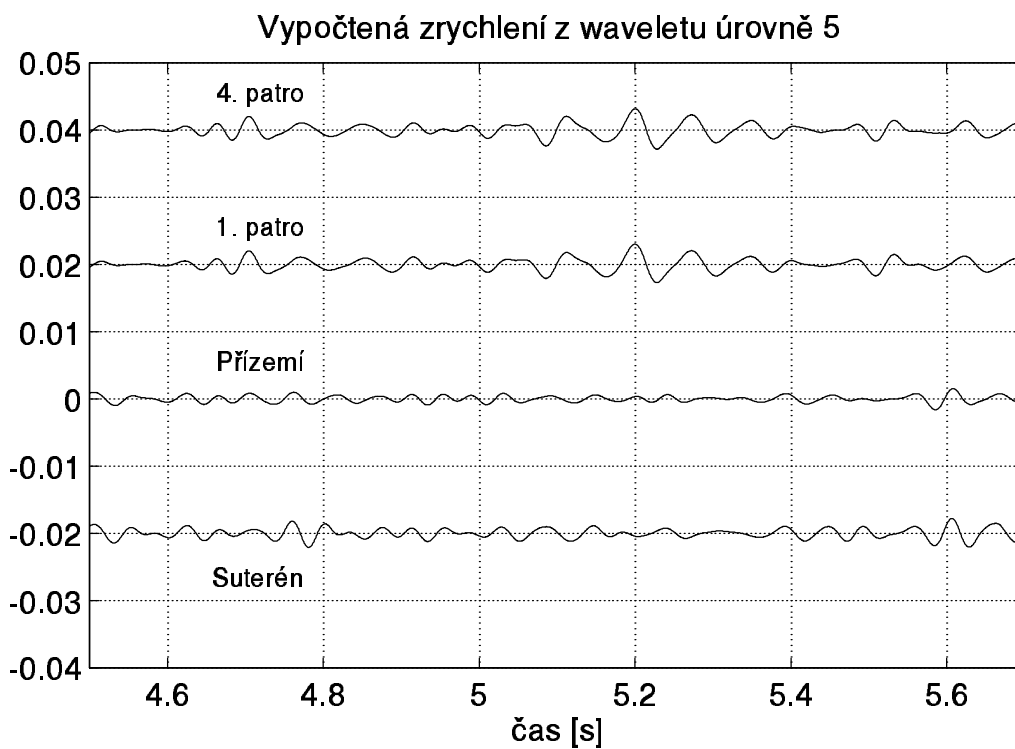
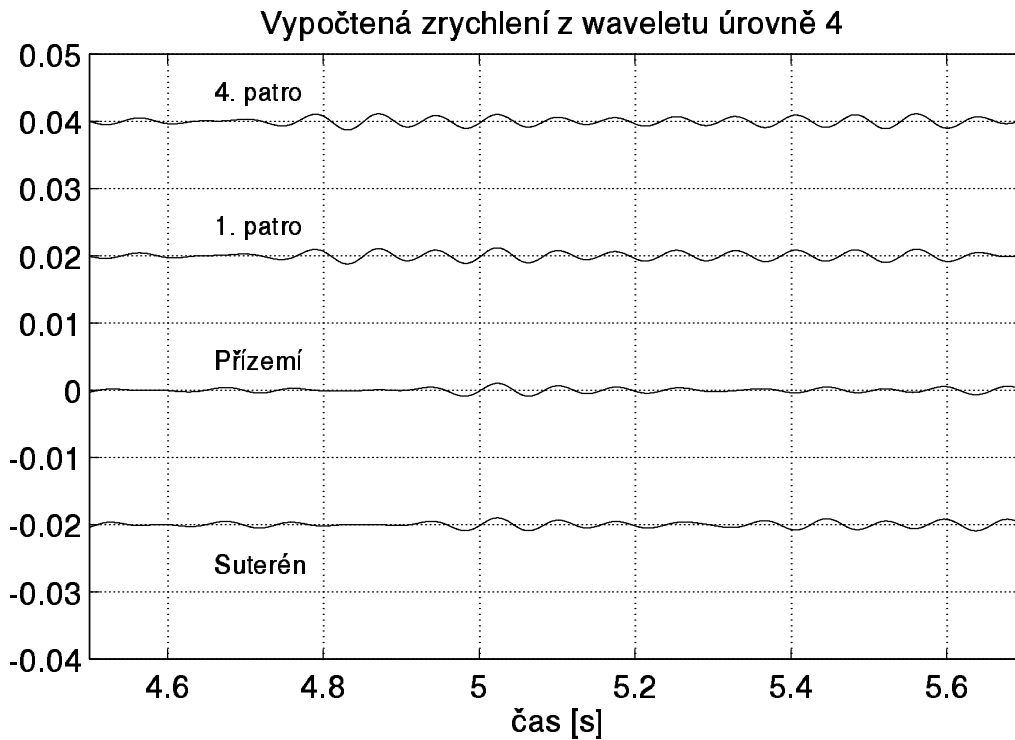
Nakonec se v této kapitole zmíníme o poslední vlastnosti periodické (kruhové) DWT, která se týká příspěvku k  $f(x)$  od úrovně -1 jeho waveletové transformace. Ze vztahu (2.98) plyne



Obr. 2.15: Čtyři simultánní záznamy vibrací a jejich waveletové transformace (D20); posloupnost délek 2048 odpovídá vzorkovacímu intervalu 60 ms.

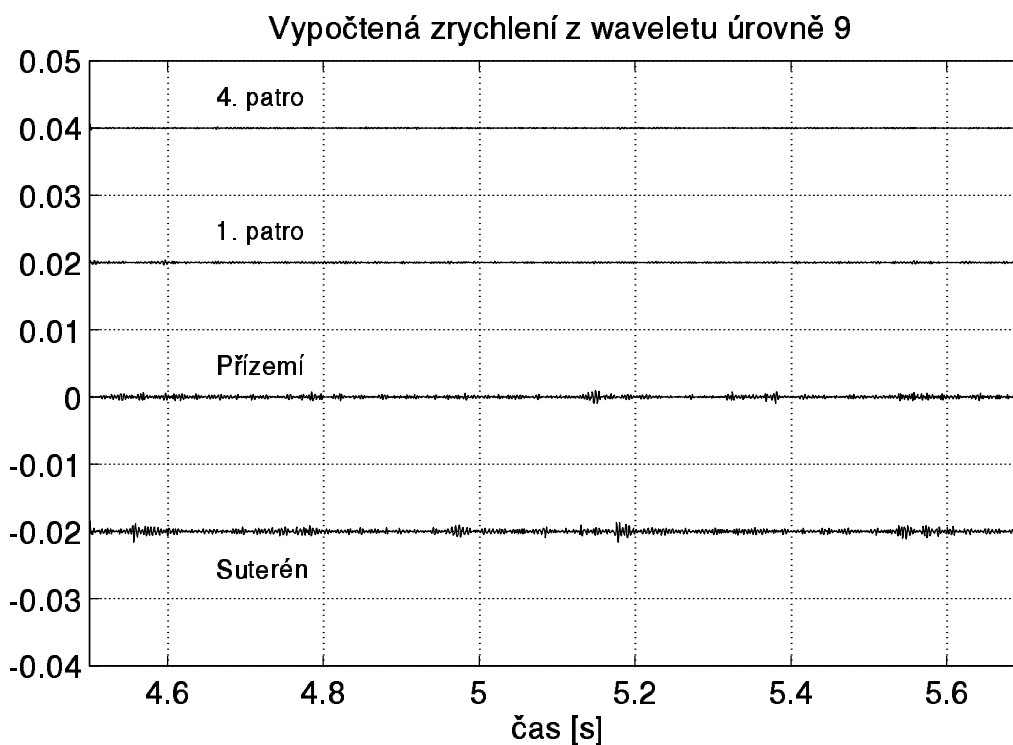
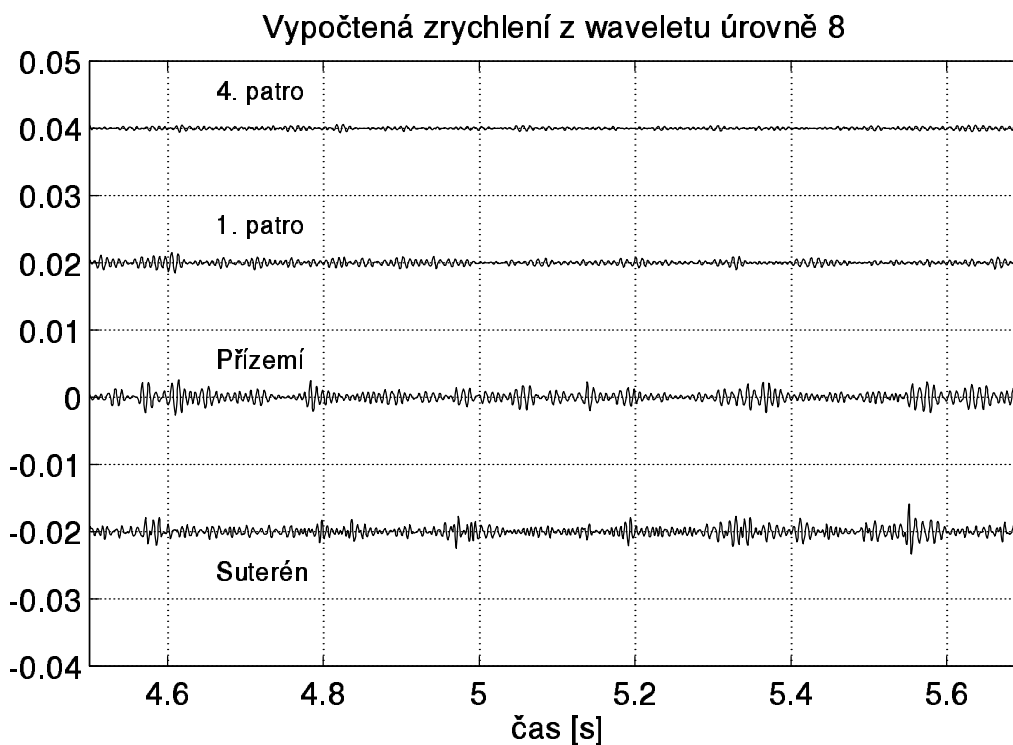
$$f^\phi(x) = a_0\phi(x). \quad (2.156)$$





Obr. 2.16: Rekonstruované signály z waveletu úrovně 4 a 5 pro záznam vibrací uvedený na obr. 2.15.

Z toho vyplývá, je-li  $f(x)$  rekonstruováno pomocí IDWT za použití pouze prvního prvku  $a_0 = a(1)$  své waveletové transformace  $a$ , musí mít rekonstruované  $f^\phi$  tvar škálovací funkce. Avšak při experimentování s programem  $iwavedn(a, N)$  brzy zjistíme, že tomu tak není a že rekonstruované



Obr. 2.17: Rekonstruované signály z waveletu úrovně 8 a 9 pro záznam vibrací uvedený na obr. 2.15.

$f^\phi(x)$  je vždy konstantní. To je zapříčiněno vlastnostmi periodické (kruhové) transformace. Ve všech případech, kromě  $N = 2$  (kdy je škálovací funkce funkcí jednotkového obdélníkového pulzu a tedy konstantní), zaujímá škálovací funkce více než jeden interval (pokud má wavelet  $N$  koeficientů,

zaujímá škálovací funkce  $N - 1$  intervalů). Tudíž obtáčí interval  $0 \leq x < 1$ . Jako příklad uvažujme škálovací funkci D4 (viz obr. 2.5). Ta se rozprostírá přes tři intervaly. Po dokonalém obtočení intervalu  $0 \leq x < 1$  je kruhová škálovací funkce dána vztahem

$$\phi(x) + \phi(x + 1) + \phi(x + 2). \quad (2.157)$$

Protože tyto funkce mohou být vytvořeny iteračně z přilehlých funkcí jednotkového obdélníkového pulzu, jsou výhodně vytvořeny iteračně ze startovací funkce, což je  $\phi_0(x) = 1$  pro všechna  $x$ . Protože waveletové koeficienty musí splňovat podmínku přesnosti (2.30) i pro  $m = 0$ , tedy

$$\sum_k (-1)^k c_k = 0, \quad (2.158)$$

takže spolu s podmínkou

$$\sum_k c_k = 2,$$

je již zřejmé, že musí platit vztah (2.78), tj.

$$\sum_{k \text{ sudé}} c_k = \sum_{k \text{ liché}} c_k = 1. \quad (2.159)$$

S použitím tohoto výsledku zjistíme, že každý iterační krok generuje  $\phi_j(x) = 1$  pro všechna  $x$ , což je patrné, když uvažujeme maticové výpočty (2.106) a (2.109) pro první dvě iterace škálovací funkce D4. Závěr je ten, že pro periodickou (kruhovou) DWT je první člen v rozvoji (2.98) vždy

$$f^\phi(x) = a_0 \quad 0 \leq x < 1. \quad (2.160)$$

## 2.8 Zobrazení středních kvadratických hodnot

Waveletový rozvoj (2.98) může být zapsán v následujícím ekvivalentním tvaru :

$$f(x) = a_0 + \sum_j \sum_k a_{2^j+k} W(2^j x - k) \quad 0 \leq x < 1. \quad (2.161)$$

Waveletové funkce  $W(2^j x - k)$  jsou zatočené funkce; viděli jsme, že zatočená škálovací funkce  $\phi(x)$  je vždy jednotková, takže se již ve vztahu (2.161) neobjevuje. Index  $j$  popisuje různé úrovně waveletů, počínaje  $j = 0$ ; index  $k$  je pořadové číslo waveletu v každé úrovni, takže pokrývá rozsah  $k = 0$  až  $2^j - 1$ .

Střední kvadratickou hodnotu  $f(x)$  můžeme vypočítat, pokud obě strany rovnice (2.161) umocníme dvěma a zintegrujeme v intervalu  $0 \leq x < 1$ , tedy

$$\begin{aligned} \int_0^1 f^2(x) dx &= a_0^2 + 2a_0 \sum_j \sum_k a_{2^j+k} \int_0^1 W(2^j x - k) dx + \\ &+ \sum_j \sum_k \sum_r \sum_s a_{2^j+k} a_{2^r+s} \int_0^1 W(2^j x - k) W(2^r x - s) dx. \end{aligned} \quad (2.162)$$

Již jsme viděli, že podmínky ortogonality a podmínka zachování plochy zůstávají v platnosti i pro waveletové funkce, které jsou zatočené okolo intervalu  $0 \leq x < 1$ . Výsledky (2.71), (2.73) a (2.76) tedy použijeme pro zatočené funkce, jen jejich integrační meze (od  $-\infty$  do  $\infty$ ) nahradíme novými (od 0 do 1). Tedy vztah (2.76) se změní na

$$\int_0^1 W(2^j x - k) dx = 0 \quad (2.163)$$

a vztah (2.71) na

$$\int_0^1 W(2^j x - k) W(2^r x - s) dx = 0 \quad \text{s výjimkou } r = j \text{ a } s = k. \quad (2.164)$$

Použijeme-li navíc vztah (2.73), dostaneme konečně

$$\int_0^1 f^2(x) dx = a_0^2 + \sum_j \sum_k a_{2^j+k}^2 \int_0^1 W^2(2^j x) dx = a_0^2 + \sum_j \sum_k a_{2^j+k}^2 \left( \frac{1}{2^j} \right). \quad (2.165)$$

Vypsáním několika prvních členů dvojnásobné sumy máme

$$\begin{aligned} \int_0^1 f^2(x) dx &= a_0^2 + a_1^2 + \frac{1}{2} (a_2^2 + a_3^2) + \frac{1}{4} (a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_7^2) + \\ &+ \frac{1}{8} (a_8^2 + a_9^2 + \dots + a_{15}^2) + \frac{1}{16} (a_{16}^2 + \dots + a_{31}^2) + \dots \end{aligned} \quad (2.166)$$

Toto je velice důležitý výsledek, neboť ukazuje, jak je střední kvadratická hodnota  $f(x)$  rozložena mezi různé waveletové úrovně a mezi různé wavelety uvnitř každé úrovně (a tedy různé pozice uvnitř intervalu  $0 \leq x < 1$ ). Pokud je řada omezená tak, aby existovalo  $2^n$  členů na pravé straně rovnice (2.166), může být integrál na levé straně přesně nahrazen výrazem

$$\frac{1}{2^n} \sum_{r=0}^{2^n-1} f_r^2,$$

kde  $f_r \equiv f(x = r/2^n)$ .

Rovnici (2.166) lze vyjádřit graficky pomocí třírozměrného grafu, ve kterém jsou hodnoty čtverců waveletových amplitud vyneseny do síťové konstrukce, jak je uvedeno na obr. 2.18. Je-li na této bázi vybudován povrch (povrch se skládá z vodorovných plošek spojených dohromady kolmými stěnami v místech čárkovaných čar a na okrajích - viz obr. 2.18), objem pod tímto povrchem představuje střední kvadratickou hodnotu  $\int_0^1 f^2(x) dx$ . Vrstevnicový graf povrchu tedy zobrazuje rozložení střední kvadratické hodnoty funkce  $f(x)$  mezi wavelety různé úrovně a různé pozice.

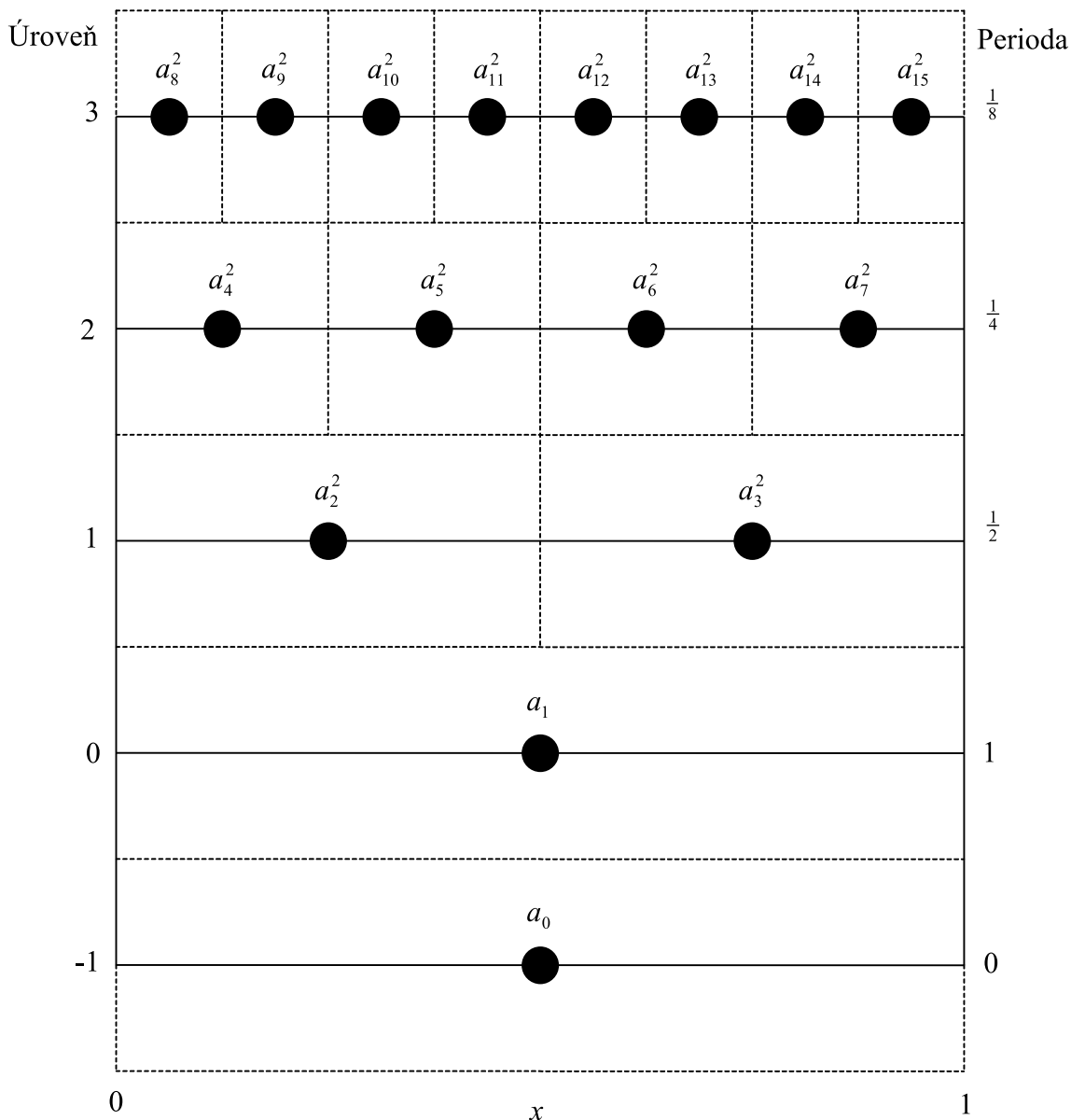
V úrovni  $j$  existuje na jednotkovém intervalu  $2^j$  waveletů. Pro wavelety stejné úrovně platí, že jsou od sebe vzdáleny o  $1/2^j$ , takže jejich základní frekvence je  $2^j$  cyklů/jednotkový interval (viz Problém 6). Tedy waveletová úroveň je měřítkem frekvence se základní frekvencí, která se zdvojnásobuje při přechodu na sousední vyšší úroveň. Proto může být mapa středních kvadratických hodnot interpretována jako graf závislosti frekvencí (stoupající po oktávách) na čase, neboť pro záznam vibrací je nezávisle proměnná  $x$  obvykle měřítkem času.

Abychom dosáhli co nejnázornějšího grafu, je výhodné umístit každou waveletovou amplitudu (její čtverec) do místa, které odpovídá středu příslušného waveletu. Mějme např. analýzu používající wavelet D6. Ten má šest koeficientů a je dlouhý pět intervalů. Uvažujme úroveň 3 na obr. 2.18. Prvek  $a_8$  představuje amplitudu waveletu, který se rozprostírá na pěti intervalech (každý interval na úrovni 3 je  $0 \leq x < \frac{1}{2}$ ). Střed tohoto waveletu leží uprostřed bloku 3. Abychom prvek  $a_8$  umístili do středu jeho waveletu, musíme  $a_8$  posunout v obr. 2.18 o  $\frac{1}{2}N - 1 = 2$  intervalů doprava.

Výsledný graf získáme tak, že stejný postup aplikujeme na všechny prvky v úrovních 1 a výše; tj. všechny prvky musíme posunout o  $\frac{1}{2}N - 1$  intervalů doprava vůči uspořádání uvedenému na obr. 2.18. Prvky, které se takto dostanou mimo pravý okraj grafu se zatočí nazpátek přes levý okraj, takže před vykreslením mapy středních kvadratických hodnot se celá posloupnost prvků v každé úrovni pouze posune o  $\frac{1}{2}N - 1$  kroků doprava.

Obr. 2.19 zobrazuje dva záznamy vibrací se stejnou spektrální hustotou. Horní graf znázorňuje vypočtenou odezvu systému s dvěma stupni volnosti na buzení bílým šumem; dolní graf je impulzní odezva stejného systému. Oba záznamy jsou normalizovány, aby měly stejnou střední kvadratickou hodnotu. Obr. 2.20 znázorňuje mapy středních kvadratických hodnot waveletových transformací těchto signálů; použit byl wavelet D4 a pro zdůraznění jemných detailů nízkých hodnot  $a^2$  byl do grafu vynášen logaritmus čtverců waveletových koeficientů.

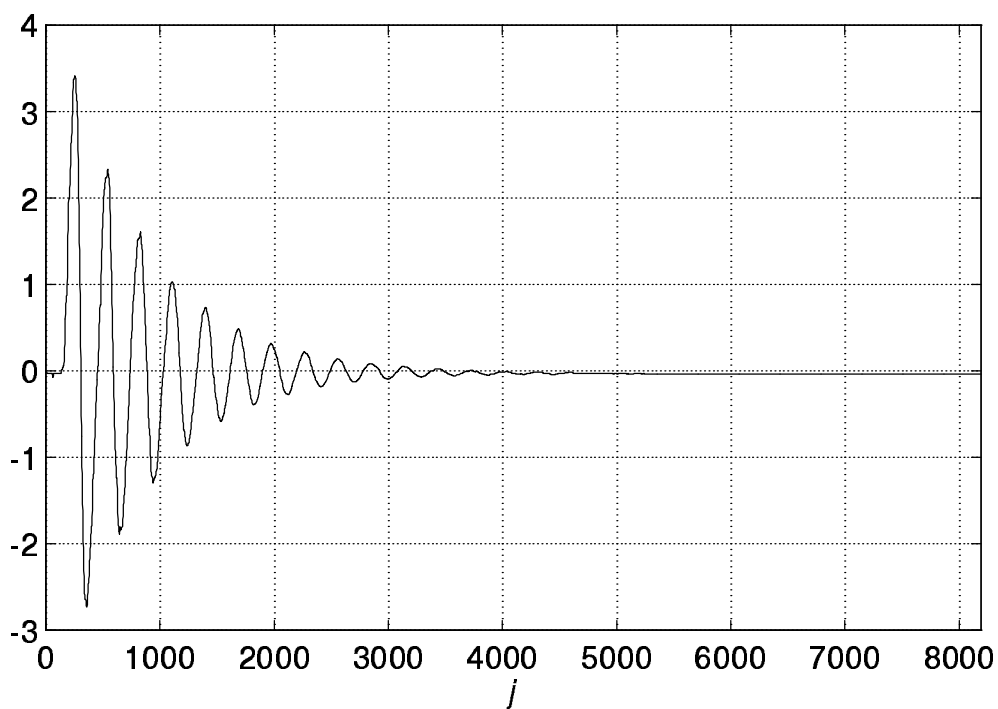
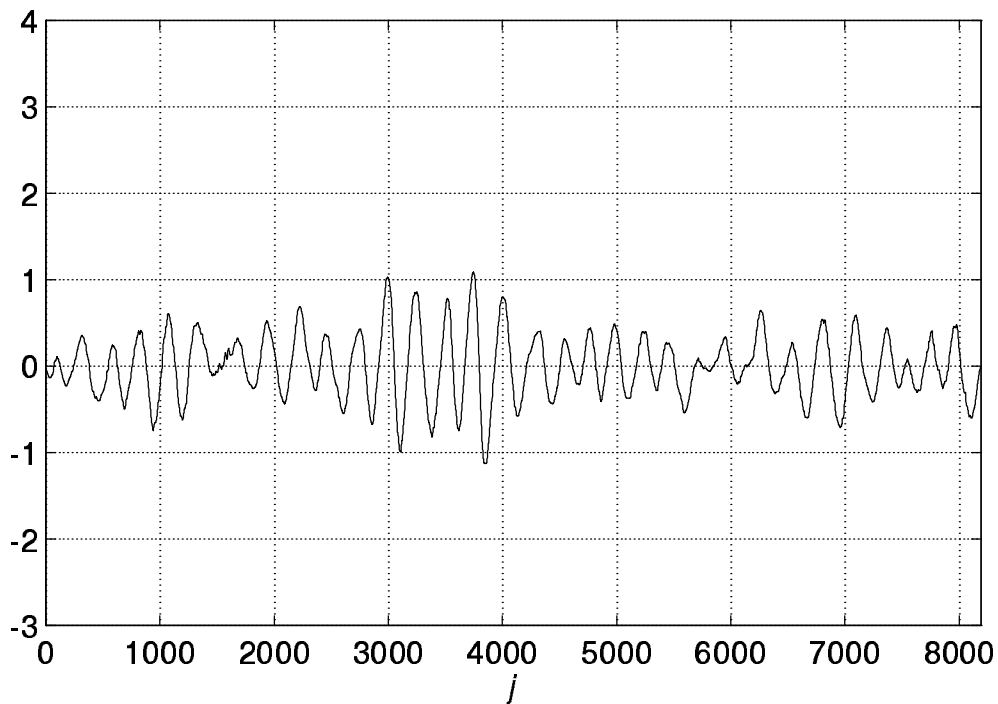
Porovnáním obr. 2.19 a 2.20 lze vypořadovat vazbu mezi funkcí a její mapou středních kvadratických hodnot. Vodorovná osa pokrývá ve všech čtyřech grafech stejný interval. V obr. 2.19 nabývá index  $j$



Obr. 2.18: Síť pro vykreslení waveletové amplitudy (čtverců amplitudy).

hodnot 1 až 8192, což je počet vykreslených bodů. Waveletová transformace posloupnosti 8192 bodů má 12 úrovní (spolu s přidanou nulovou úrovní a konstantní úrovní). Nejvyšší úroveň, 12, má jeden wavelet pro každé dvě pozice, takže v této úrovni existuje 4096 prvků waveletové transformace. Proto dvourozměrné pole čísel, které definuje povrch, jehož báze je jako báze uvedena na obr. 2.18, má  $12 + 2 = 14$  řádek a 4096 sloupců. Řádek 1 má 4096 prvků, které jsou všechny rovny  $a_0^2$ , řádek 2 má stejný počet prvků, ale jejich hodnota je  $a_1^2$ , řádek 3 má 2048 prvků rovno  $a_2^2$  a 2048 prvků rovno  $a_3^2$ , atd.

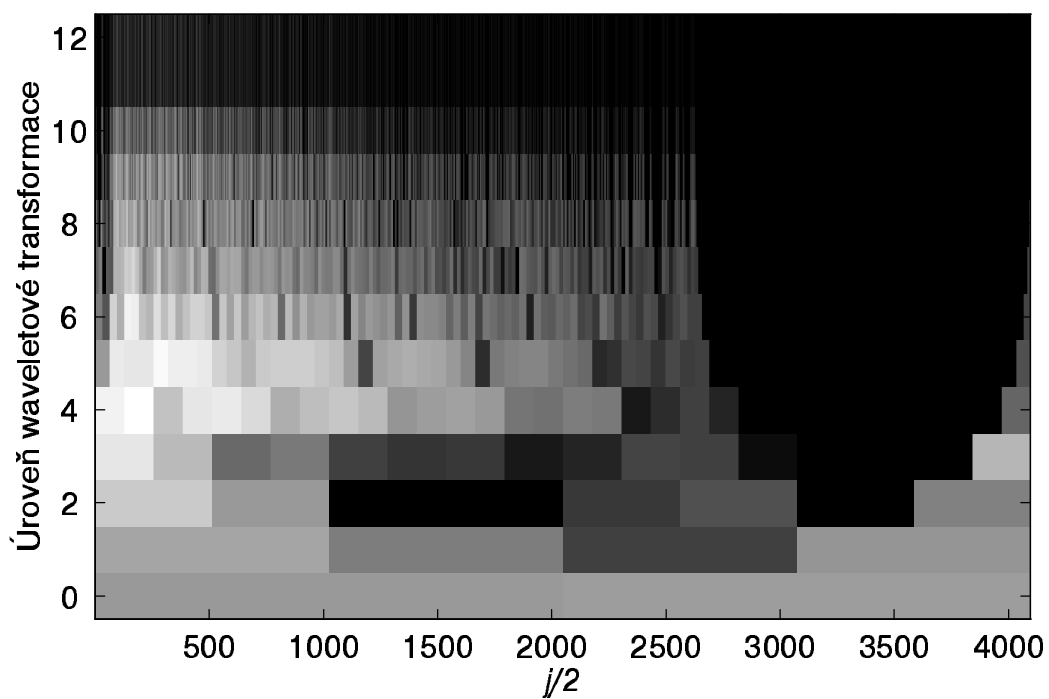
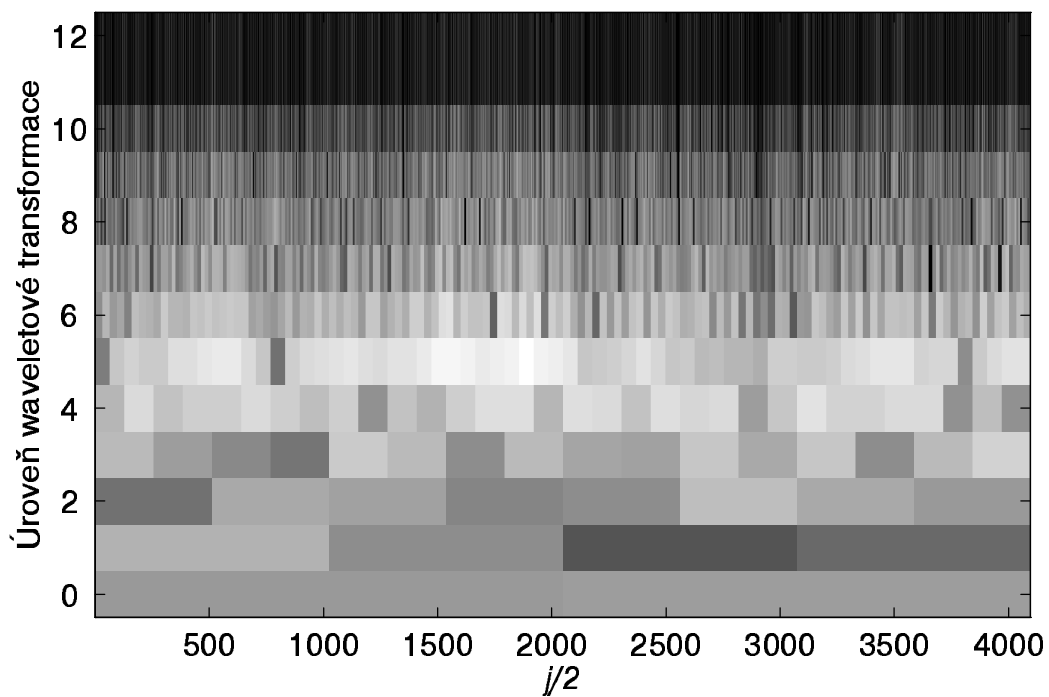
Na obr. 2.20 jsou vrstevnice kresleny relativně tlustou čarou a černé oblasti vytvořené těsně vedle sebe jdoucími vrstevnicemi mohou být proto mylně považovány za různé stupně šedi. Nejvyšší ploška se vyskytuje v dolním grafu v úrovni 5 a pro  $j$  asi 200, v horním grafu není této úrovně



Obr. 2.19: Dva signály se stejnou spektrální hustotou; horní představuje realizaci stacionárního náhodného procesu, dolní je nestacionární impulsní odezva.

dosaženo nikde. Ačkoliv je časový průběh tranzientní odezvy (obr. 2.19 dole) v pravé části grafu nulový, mapa středních kvadratických hodnot

(obr. 2.20 dole) vykazuje dva nízké „útesy“ vybíhající z pravého okraje grafu. Ty vznikly v důsledku



Obr. 2.20: Mapa středních kvadratických hodnot pro dva signály z obr. 2.19 vypočtená waveletem D4; výška je vykreslena v logaritmickém měřítku na síti dle obr. 2.18.

periodické (kruhové) povahy transformace a přispívají k levé části signálu na obr. 2.19. Pro ilustraci vysokofrekvenčního chování je vykresleno pět vrstevnic, nejnižší vrstevnice má výšku asi 1000-krát menší než vrstevnice nejvyšší.



Další rozmanité příklady aplikací waveletových map ve vibrační analýze a detailnější vyšetření vlastností waveletových map středních kvadratických hodnot je uvedeno v článcích [NEWL93a, NEWL94a].

Barevné mapy středních kvadratických hodnot vytvořené diskrétní waveletovou transformací se staly důležitým nástrojem v analýze náhodných vibrací. Nabízejí značné možnosti i pro vyšetřování časových závislostí nestacionárních signálů.

## 2.9 Konvoluce pomocí waveletů

Ortogonalní vlastnosti waveletů lze použít v algoritmu pro výpočet konvolučního integrálu

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\theta)x(t - \theta) d\theta.$$

Tímto integrálem lze vypočítat odezvu pasivního lineárního systému  $y(t)$ , je-li známo jeho buzení  $x(t)$  a jeho impulzní odezva  $h(\theta)$ ,  $h(\theta) = 0$  pro  $\theta < 0$ .

Použijme výše uvedeny vztah pro výpočet  $y(t)$  pouze pro jeden specifický čas. Pro tento okamžik,  $t = t_0$ , definujme novou proměnnou

$$z(\theta) = x(t_0 - \theta), \quad (2.167)$$

takže konvoluční integrál se změní na

$$y(t_0) = \int_0^1 h(\theta)z(\theta) d\theta. \quad (2.168)$$

Integrační meze jsou změněny a probíhají od 0 do 1, neboť předpokládáme, že  $h(\theta)$  klesá dosti rychle, takže  $h(\theta = 1) \rightarrow 0$  dosti těsně.

Nyní zapišme  $h(\theta)$  a  $z(\theta)$  pomocí členů jejich periodického waveletového rozvoje, takže podle vztahu (2.161) dostaneme

$$h(\theta) = h_0 + \sum_j \sum_k h_{2^j+k} W(2^j\theta - k), \quad (2.169)$$

$$z(\theta) = z_0 + \sum_r \sum_s z_{2^r+s} W(2^r\theta - s) \quad (2.170)$$

a substitucí do vztahu (2.168) obdržíme

$$\begin{aligned} y(t_0) &= h_0 z_0 + h_0 \sum_r \sum_s z_{2^r+s} \int_0^1 W(2^r\theta - s) d\theta + z_0 \sum_j \sum_k h_{2^j+k} \int_0^1 W(2^j\theta - k) d\theta + \\ &+ \sum_j \sum_k \sum_r \sum_s h_{2^j+k} z_{2^r+s} \int_0^1 W(2^j\theta - k) W(2^r\theta - s) d\theta. \end{aligned} \quad (2.171)$$

Aplikací podmínek (2.163) a (2.164) zjistíme, že

$$y(t_0) = h_0 z_0 + \sum_j \sum_k (1/2^j) h_{2^j+k} z_{2^j+k}$$

$$= \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2/2 & h_3/2 & h_4/2 & h_5/2 & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad (2.172)$$

kde  $\begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & \dots \end{bmatrix}$  je waveletová transformace  $h(\theta)$  a  $\begin{bmatrix} z_0 & z_1 & z_2 & \dots \end{bmatrix}$  je waveletová transformace  $z(\theta)$ . Samozřejmě že v obou případech musí být použito stejného analyzujícího waveletu. Ve vztahu (2.172) se objevuje činitel  $(1/2^j)$ , neboť ze vztahu (2.73) plyne

$$\int_{-\infty}^{\infty} W^2(2^j \theta) d\theta = 1/2^j. \quad (2.173)$$

Interval, přes který se provádí výpočet, musí být dostatečně dlouhý, aby se mimo něj  $h(\theta) \rightarrow 0$ . Uvnitř tohoto intervalu jsou  $h(\theta)$  a  $z(\theta)$  podél osy  $\theta$  ekvidistantně vzorkovány tak, abychom obdrželi  $2^n$  datových bodů, kde  $n$  je z důvodů správné reprezentace jemných detailů dostatečně velké celé číslo.

Výsledek výpočtu vztahu (2.172) vede k jednomu časovému bodu odezvy. Druhý bod se získá vodorovným posunutím vstupní funkce a opakováním výpočtu (2.172). Bohužel waveletová transformace není vzhledem k posunutí invariantní. Kolik bodů odezvy je požadováno, tolik musí být vypočteno nových transformací  $z$ . To je pro praktické výpočty velká nevýhoda. Nejedná se tedy o výpočetně vhodnou proceduru, ačkoliv je waveletová konvoluce zajímavým příkladem vlastností diskrétní waveletové transformace. Pro výpočet odezev systémů je mnohem rychlejší použít výpočtů ve frekvenční oblasti, které používají FFT.



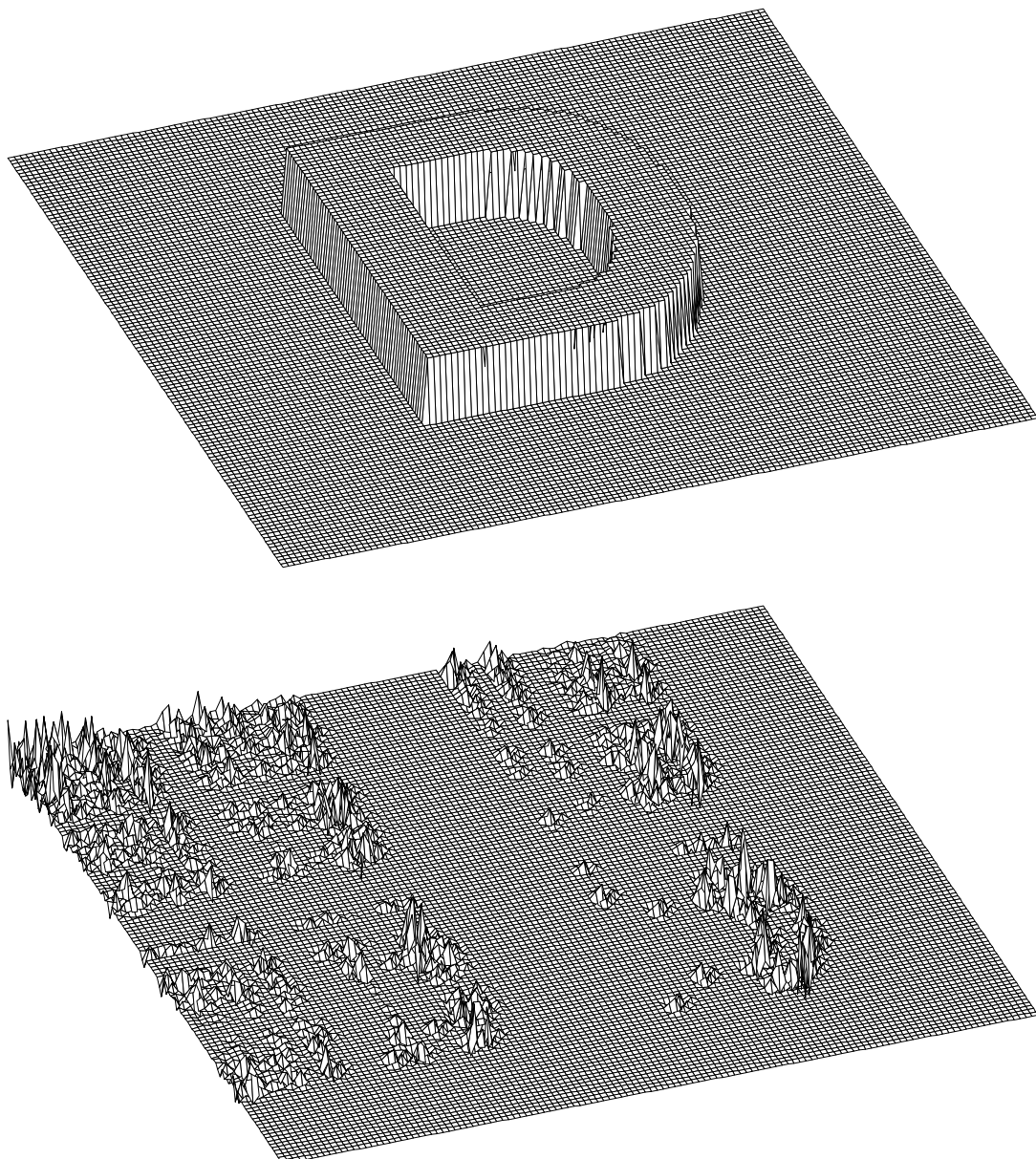


s  $N = 20$ . Matice  $\mathbf{A}$  je znázorněna na obr. 2.21 pod  $\mathbf{F}$ . Tato matice  $\mathbf{A}$  je použita v obr. 2.22 ke znázornění stále vyšších úrovní rekonstrukce matice  $\mathbf{F}$ . Ve všech případech jsou všechny prvky matice  $\mathbf{A}$  nastaveny na nulu kromě submatic v horním levém rohu vztahu (2.177). Řád těchto nenulových submatic vytvořených z prvků matice  $\mathbf{A}$  se postupně zvětšuje ( $4 \times 4$ ,  $8 \times 8$ ,  $16 \times 16$ ,  $32 \times 32$ ,  $64 \times 64$  a  $128 \times 128$ ).

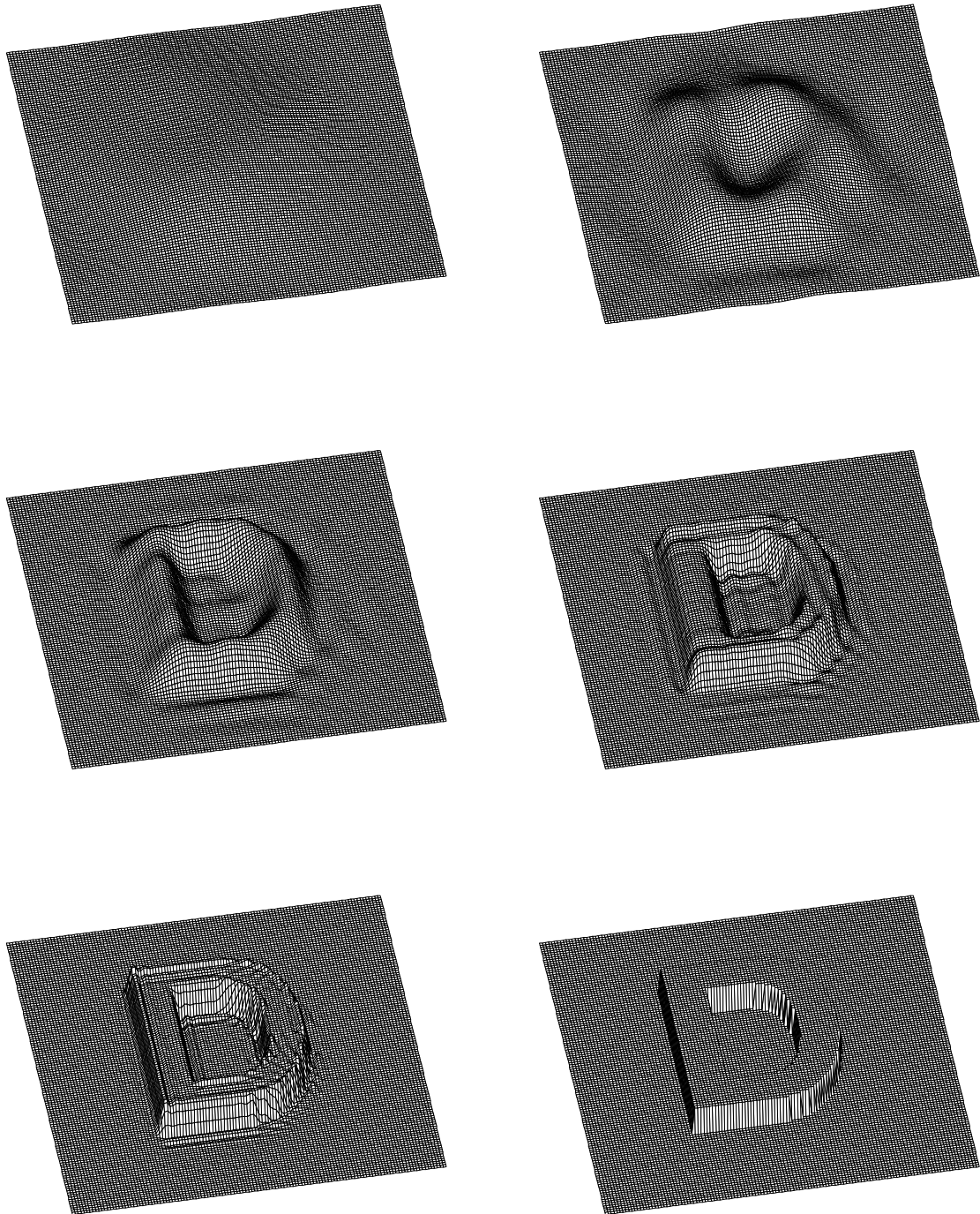
Samozřejmě existuje mnoho dalších aplikací (jak pro jednorozměrnou, tak pro vícerozměrnou waveletovou transformaci). Tyto aplikace zasahují do nejrůznějších oblastí (viz např. [CHUI92b] a [DAUB92]). Pokrok v matematické oblasti (přehledy v [HEIL89] a [STRA89]) je v současnosti před aplikacemi ve vědě a technice, ale tento stav se pravděpodobně brzy změní, tak jak bude software pro diskrétní waveletovou transformaci stále dostupnější. Některé aplikace DWT ve vibrační analýze jsou popsány v [NEWL93a] a [NEWL94a].

## 2.11 Harmonické wavelety

Až dosud zde studované wavelety byly vždy odvozeny z dilatačních rovnic s reálnými koeficienty. Jak se zvyšuje počet  $N$  koeficientů (který musí být sudý), stává se Fourierova transformace waveletů kompaktnější. V doprovodném programu *dcoeffs(N)* jsou sice zahrnuty jen hodnoty  $N$  do 20, ale numerické hodnoty waveletových koeficientů pro  $N > 20$  mohou být, je-li třeba, vypočteny vyřešením  $N$  nelineárních algebraických rovnic, které je definují. Pokud to uděláme, ukáže se, že



Obr. 2.21: Dvourozměrná funkce  $\mathbf{F}(128 \times 128)$  reprezentující vystouplé písmeno D a její waveletová transformace  $\mathbf{A}$  vypočtená  $\text{wave2dn}(F, N)$ , kde  $N = 20$ .



Obr. 2.22: Postupná rekonstrukce funkce  $\mathbf{F}(128 \times 128)$  vypočtená  $iwave2dn(B, N)$ , kde  $\mathbf{B} = \text{zeros}(128, 128)$  mimo submatic  $\mathbf{A}(m, m)$  v horním levém rohu, kde  $m = 4, 8, 16, 32$  a  $64$ .

dělníkové, takže modul jeho Fourierovy transformace  $W(\omega)$  je až nějaké oktávové pásmo nulový. Vhodný způsob definování  $|W(\omega)|$  pro různé úrovně waveletů je uveden na obr. 2.23. Všechny Fourierovy transformace jsou pro  $\omega < 0$  identicky nulové a např. pro nulovou úroveň je definice  $|W(\omega)|$  následující



$$|W(\omega)| = \begin{cases} 1/2\pi, & \text{pro } 2\pi \leq \omega < 4\pi \\ 0, & \text{jinde.} \end{cases} \quad (2.181)$$

Pokud zrušíme znaménko modulu okolo  $W(\omega)$  ve vztahu (2.181) a položíme

$$W(\omega) = \begin{cases} 1/2\pi, & \text{pro } 2\pi \leq \omega < 4\pi \\ 0, & \text{jinde,} \end{cases} \quad (2.182)$$

pak z výpočtu inverzní Fourierovy transformace  $W(\omega)$  zjistíme, že odpovídající komplexní wavelet je

$$w(x) = (e^{i4\pi x} - e^{i2\pi x}) / i2\pi x, \quad (2.183)$$

jehož reálná a imaginární část je znázorněna na obr. 2.24.

Zavedení komplexní funkce umožňuje dva reálné wavelety vyjádřit jedním výrazem. Stejná věc nastává ve Fourierově analýze, kdy se komplexní exponenciální tvar  $e^{i2\pi kt/T}$  používá k vyjádření jak sudé funkce  $\cos(2\pi kt/T)$ , tak liché funkce  $\sin(2\pi kt/T)$  ve vzorci pro Fourierův rozvoj

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{i2\pi kt/T}. \quad (2.184)$$

Z obr. 2.24 je patrné, že reálná část  $w(x)$  ve vztahu (2.183) představuje sudý wavelet (wavelet, pro který platí  $w(x) = w(-x)$ ) a imaginární část představuje lichý wavelet (pro který platí  $w(-x) = -w(x)$ ).

Pro obecný komplexní wavelet úrovně  $j$ , který je posunut o  $k$  kroků velikosti  $1/2^j$ , definujeme

$$W(\omega) = \begin{cases} (1/2\pi)2^{-j}e^{-i\omega k/2^j}, & \text{pro } 2\pi 2^j \leq \omega < 4\pi 2^j \\ 0, & \text{jinde.} \end{cases} \quad (2.185)$$

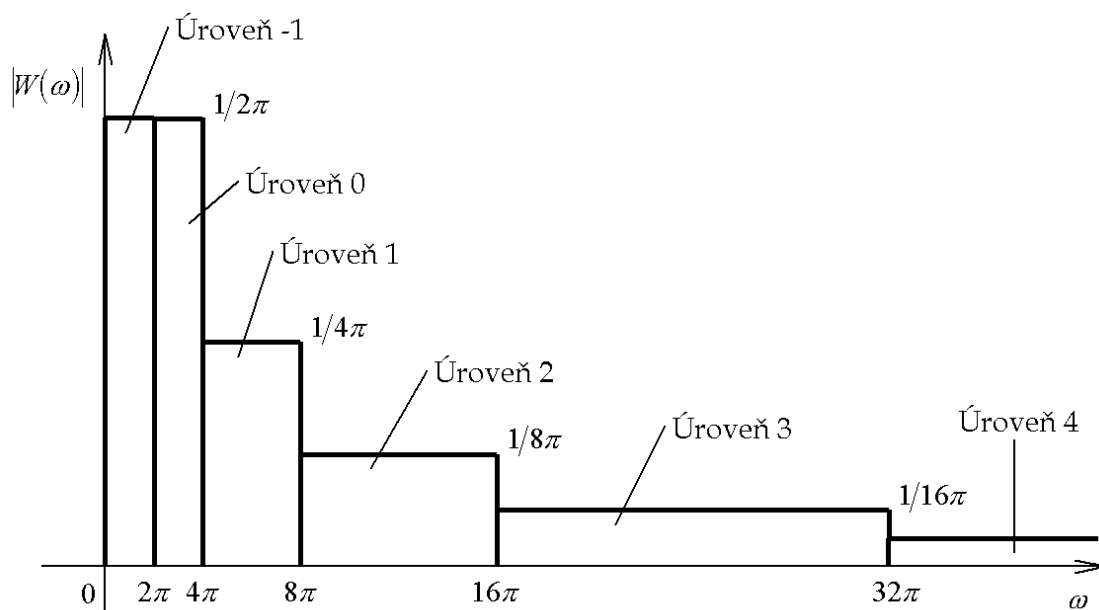
Výpočtem jeho inverzní Fourierovy transformace dostáváme

$$w(2^j x - k) = (e^{i4\pi(2^j x - k)} - e^{i2\pi(2^j x - k)}) / i2\pi(2^j x - k), \quad (2.186)$$

kde  $j = 0$  až  $\infty$ ,  $k = -\infty$  až  $\infty$ . Pro úroveň  $-1$ , která má frekvenční pásmo  $0 \leq \omega < 2\pi$  (viz obr. 2.23) dostaneme výpočtem inverzní Fourierovy transformace vztahu

$$W(\omega) = \begin{cases} (1/2\pi)e^{-i\omega k}, & \text{pro } 0 \leq \omega < 2\pi \\ 0, & \text{jinde} \end{cases} \quad (2.187)$$

odlišnou funkci, kterou můžeme podle analogie s předchozími výsledky nazývat škálovací funkce



Obr. 2.23: Amplitudy Fourierových transformací harmonických waveletů různých úrovní.

$$\phi(x - k) = \left( e^{i2\pi(x-k)} - 1 \right) / i2\pi (x - k) \quad (2.188)$$

$k = -\infty$  až  $\infty$  Reálná a imaginární část  $\phi(x)$  je znázorněna na obr. 2.25.

Hlavním důvodem pro výběr těchto waveletových a škálovacích funkcí je, že tvoří ortogonální množinu a mají následující vlastnosti :

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(2^j x - k) w(2^r x - s) dx = 0 \text{ pro } \forall j, k, r, s \quad (j, r \geq 0), \quad (2.189)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(2^j x - k) w^*(2^r x - s) dx = 0 \text{ pro } \forall j, k, r, s \quad (j, r \geq 0) \text{ kromě případu, kdy } r = j \text{ a } s = k; \quad (2.190)$$

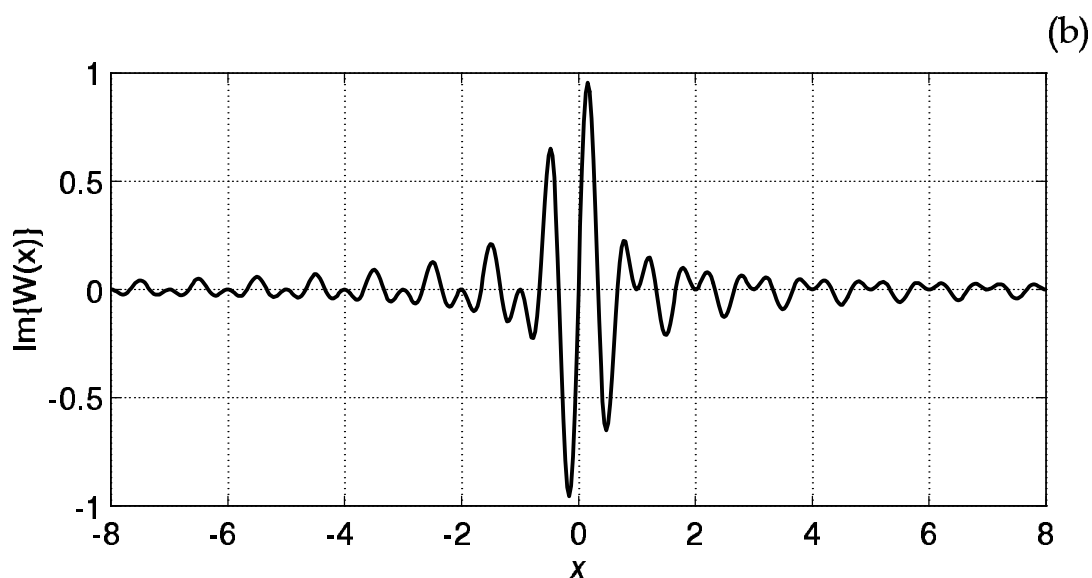
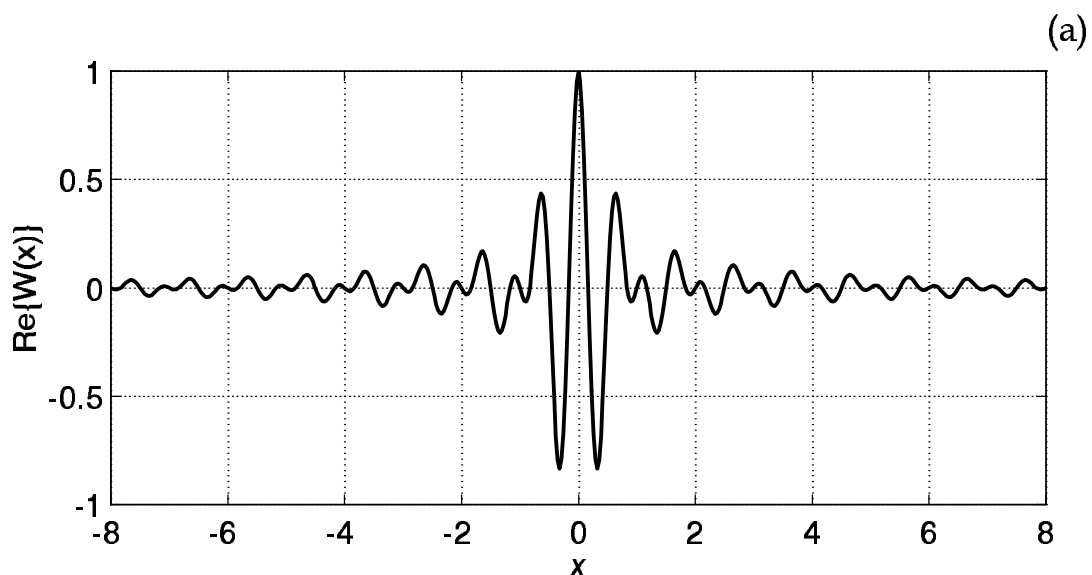
potom

$$\int_{-\infty}^{\infty} |w(2^j x - k)|^2 dx = 1 / 2^j. \quad (2.191)$$

Dále

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x - k) \phi(x - s) dx = 0 \text{ pro } \forall k, s, \quad (2.192)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x - k) \phi^*(x - s) dx = 0 \text{ pro } \forall k, s \text{ kromě případu, kdy } s = k; \quad (2.193)$$



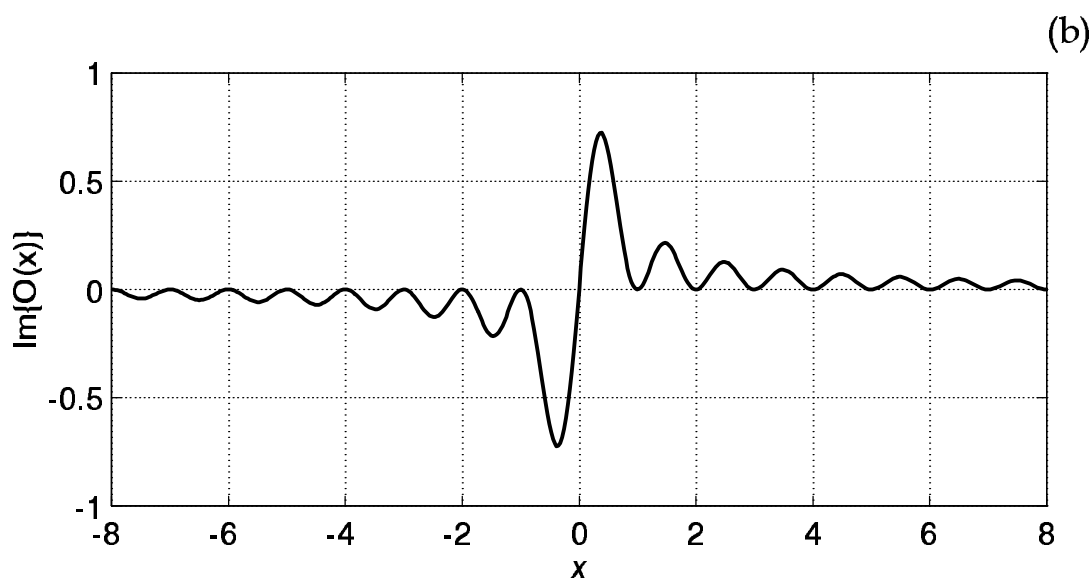
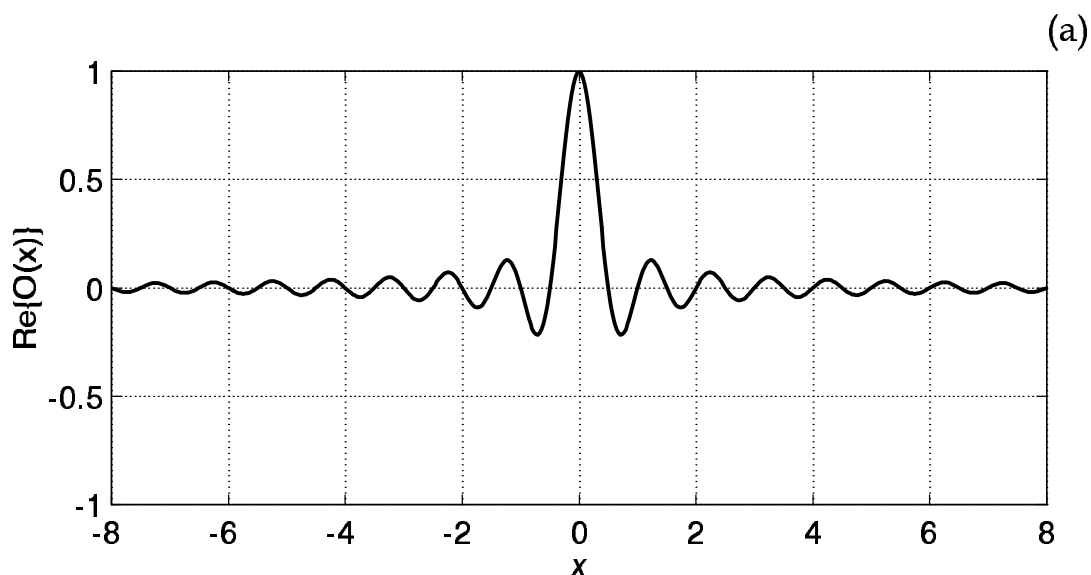
Obr. 2.24: Reálná část (a) a imaginární část (b) harmonického waveletu definovaného vztahem (2.183).

potom

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x-k)|^2 dx = 1 \quad (2.194)$$

a konečně

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(2^j x - k) \phi(x-s) dx = 0 \text{ pro } \forall j, k, s \quad (j \geq 0), \quad (2.195)$$



Obr. 2.25: Reálná část (a) a imaginární část (b) harmonické škálovací funkce definované vztahem (2.188).

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(2^j x - k) \phi^*(x - s) dx = 0 \text{ pro } \forall j, k, s \quad (j \geq 0). \quad (2.196)$$

Ověření těchto výsledků spočívá na vlastnostech jejich Fourierových transformací a je odvozeno ze dvou výsledků teorie Fourierovy transformace, tj. pokud  $W(\omega)$  resp.  $V(\omega)$  jsou Fourierovy transformace  $w(x)$  resp.  $v(x)$ , pak

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x) v(x) dx = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) V(-\omega) d\omega, \quad (2.197)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x) v^*(x) dx = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) V^*(\omega) d\omega. \quad (2.198)$$

Většina ortogonálních vlastností může být z těchto dvou rovnic okamžitě odvozena.

Prvně uvažujme vztah (2.189) a (2.192). Poněvadž jsou  $W(\omega)$  na obr. 2.23 definována pouze pro  $\omega \geq 0$  a jsou identicky nulová pro  $\omega < 0$ ;  $W(\omega)$  je pro záporné  $\omega$  vždy nulové, oba výsledky okamžitě plynou ze vztahu (2.197).

Dále uvažujme vztahy (2.190), (2.195) a (2.196). Wavelety různých úrovní mají Fourierovy transformace, které zabírají různá frekvenční pásma. Proto jsou vztahy (2.195) a (2.196) pravdivé a tím je splněn i vztah (2.190), je-li  $r \neq j$ .

Pro wavelety ve stejném frekvenčním pásmu platí, že jsou ortogonální s jiným komplexně sdruženým waveletem pouze v případě, jsou-li wavelety posunuty o několik kroků jisté velikosti. Pro wavelety úrovně  $j$  je požadovaný posun  $k/2^j$  jednotek ( $k$  je libovolné celé číslo); pro škálovací funkci je požadováno  $k$  jednotek. To může být ověřeno substitucí příslušných výrazů pro Fourierovu transformaci (2.185) a (2.187) do vztahu (2.198) a provedením integrace. Zjistíme, že výsledek je nulový pouze v případě, kdy jsou wavelety a škálovací funkce správně posunuty.

Výsledkem je zjištění, že  $w(2^j x - k)$  definovaný vztahem (2.186) spolu s  $\phi(x - k)$  podle (2.188) tvoří ortogonální rodinu waveletů, které jsou alternativou k waveletům odvozených z dilatačních rovnic. Lze ukázat, že střední kvadratická hodnota řad používajících harmonické wavelety jako své báze funkce musí, tak jako je tomu u dilatačních waveletů, se stoupajícím počtem svých členů konvergovat; tj. musí existovat  $\int_{-\infty}^{\infty} \|f(x)\|^2 dx$  (viz [NEWL93b, NEWL94b]). Hlavní rozdíly jsou tyto: Harmonické wavelety mohou být popsány jednoduchým analytickým vzorcem, jsou kompaktní ve frekvenční oblasti a jsou popsány komplexní funkcí, takže pro každý pár  $j$  a  $k$  existují dva reálné wavelety. Dilatační wavelety nemohou být vyjádřeny ve tvaru funkce, jsou kompaktní v doméně  $x$  (např. časová doména) a pro každý pár  $j$  a  $k$  existuje jeden reálný wavelet. Ačkoliv mají harmonické wavelety výhodnou pásmově omezenou Fourierovu transformaci, jejich nevýhodou je pomalý pokles, úměrný pouze  $1/x$ , v doméně  $x$ . Naopak wavelety odvozené z dilatační rovnice s  $N$  koeficienty zaujímají  $N - 1$  jednotkových intervalů a mimo tento rozsah jsou identicky rovny nule. Velkou výhodou harmonických waveletů je jejich výpočetní jednoduchost. V následující kapitole uvidíme, že existuje jednoduchý algoritmus pro analýzu pomocí harmonických waveletů, která používá FFT a který je obvykle rychlejší než algoritmus pro analýzu pomocí dilatačních waveletů uvedený v Dodatku.

## 2.12 Diskrétní harmonická waveletová transformace

Pro komplexní wavelety musíme definovat dva amplitudové koeficienty

$$a_{j,k} = 2^j \int_{-\infty}^{\infty} f(x) w^*(2^j x - k) dx, \quad (2.199)$$

$$\tilde{a}_{j,k} = 2^j \int_{-\infty}^{\infty} f(x) w(2^j x - k) dx. \quad (2.200)$$

Pokud je  $f(x)$  reálné,  $\tilde{a}_{j,k}$  je komplexně sdružené s  $a_{j,k}$ ; tj.  $\tilde{a}_{j,k} = a_{j,k}^*$ , ale pokud uvažujeme případ, kdy je  $f(x)$  komplexní, tak na  $a_{j,k}$  a  $\tilde{a}_{j,k}$  musíme pohlížet jako na dvě různé amplitudy. Podobně definujeme

$$a_{\phi,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \phi^*(x - k) dx, \quad (2.201)$$

$$\tilde{a}_{\phi,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \phi(x - k) dx. \quad (2.202)$$

Waveletový rozvoj obecné funkce  $f(x)$ , pro kterou platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty, \quad (2.203)$$

je pomocí výrazů (2.201) a (2.202) dán vztahem

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (a_{\phi,k} \phi(x - k) + \tilde{a}_{\phi,k} \phi^*(x - k)) \\ &+ \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (a_{j,k} w(2^j x - k) + \tilde{a}_{j,k} w^*(2^j x - k)). \end{aligned} \quad (2.204)$$

Hledejme diskrétní algoritmus výpočtu koeficientů  $a_{\phi,k}$ ,  $\tilde{a}_{\phi,k}$ ,  $a_{j,k}$  a  $\tilde{a}_{j,k}$  vyskytujících se v tomto rozvoji. Jako příklad uvažujme  $a_{j,k}$  definované vztahem (2.199). Nejprve provedeme substituci členu  $w^*(2^j x - k)$  pomocí výrazu pro jeho Fourierovu transformaci, kde ze vztahu (2.185) dostáváme

$$w^*(2^j x - k) = \int_{2\pi 2^j}^{4\pi 2^j} (1/2\pi) 2^{-j} e^{i\omega k/2^j} e^{-i\omega x} d\omega, \quad (2.205)$$

takže pro vztah (2.199) dostaneme

$$a_{j,k} = 1/2\pi \int_{2\pi 2^j}^{4\pi 2^j} d\omega e^{i\omega k/2^j} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-i\omega x}. \quad (2.206)$$

Poněvadž Fourierova transformace  $w^*(2^j x - k)$  je mimo interval  $2\pi 2^j \leq \omega < 4\pi 2^j$  rovna identicky nule, je možné obrátit pořadí integrace. Druhý integrál přes  $x$  je právě Fourierova transformace  $f(x)$  násobená  $2\pi$ , takže pro vztah (2.206) dostaneme

$$a_{j,k} = \int_{2\pi 2^j}^{4\pi 2^j} F(\omega) e^{i\omega k/2^j} d\omega. \quad (2.207)$$

Nyní nahradíme integrál sumou. V tom případě procházíme frekvenční pásmo s krokem  $2\pi$  (takže v úrovni  $j$  existuje  $2^j$  kroků). Proto může být  $F(\omega)$  nahrazeno diskretním koeficientem  $F_{2^j+s}$ , kde

$$F_{2^j+s} = 2\pi F(\omega = 2\pi(2^j + s)) \quad (2.208)$$

a integrál ve vztahu (2.207) se stane sumou

$$a_{2^j+k} = \sum_{s=0}^{2^j-1} F_{2^j+s} e^{i2\pi(2^j+s)k/2^j}, \quad (2.209)$$

neboť  $\Delta\omega = 2\pi$  se vykrátí s  $1/2\pi$  ze vztahu (2.208). Poněvadž pro všechna  $k$  platí  $e^{i2\pi k} = 1$ , nakonec dostaneme

$$a_{2^j+k} = \sum_{s=0}^{2^j-1} F_{2^j+s} e^{i2\pi s k/2^j}, \quad k = 0 \text{ až } 2^j - 1. \quad (2.210)$$

Což je zpětná diskretní Fourierova transformace pro posloupnost frekvenčních koeficientů  $F_{2^j+s} = 0$  až  $2^j - 1$ .

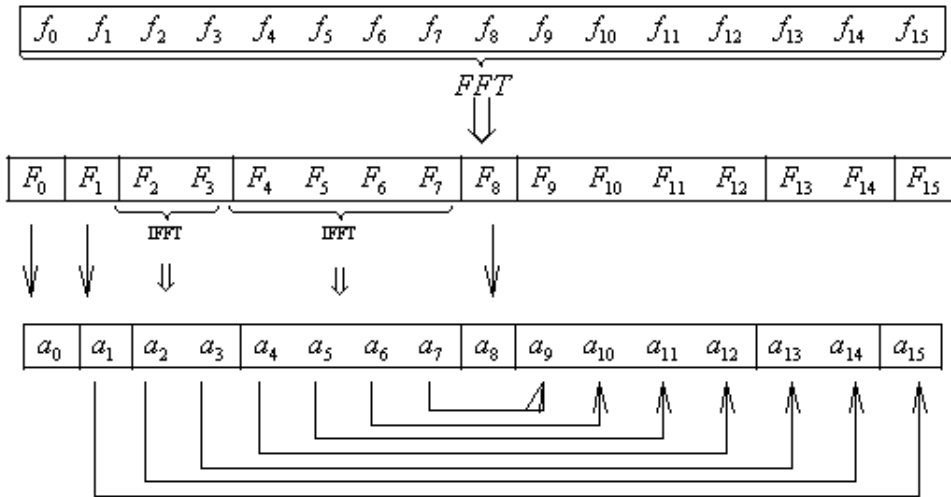
Závěr je následující. Při výpočtu waveletových koeficientů diskretním algoritmem vyjdeme z reprezentace  $f(x)$  jako diskretní posloupnosti  $f_r$ ,  $r = 0$  až  $N - 1$  (kde  $N$  je mocninou 2). Potom se k výpočtu množiny (komplexních) frekvenčních koeficientů  $F_t$ ,  $t = 0$  až  $N - 1$ , použije FFT. Dále se oktávové bloky  $F_t$  zpracují IFFT, čímž se vytvoří amplitudy harmonického waveletového rozvoje  $f_r$ .

Při odvozování vztahu pro  $\tilde{a}_{2^j+k}$  vyjdeme ze vztahu (2.200) a získáme tak

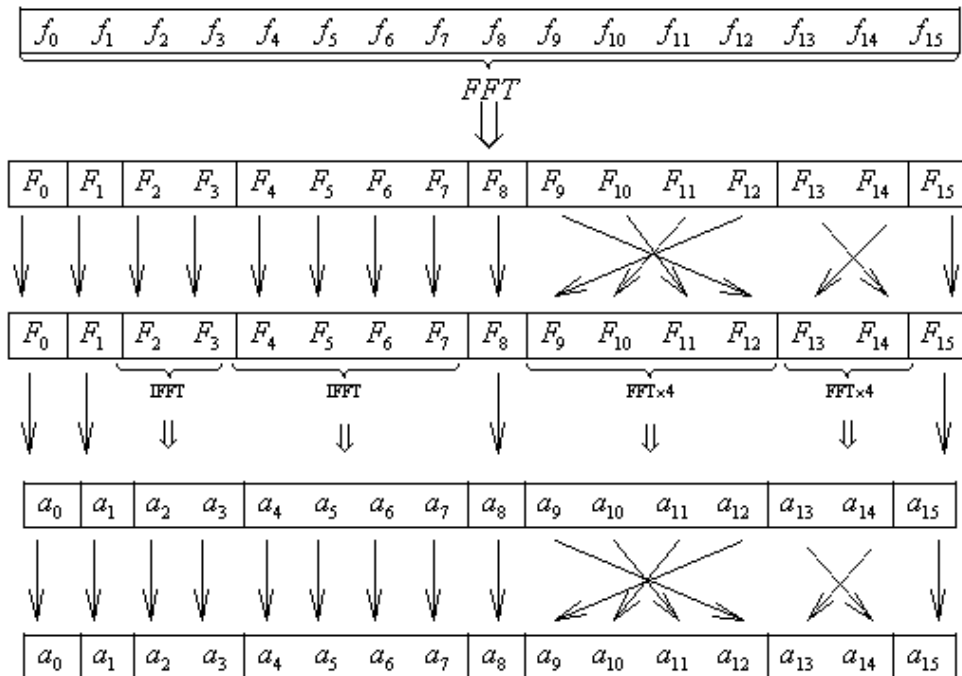
$$\tilde{a}_{2^j+k} = \sum_{s=0}^{2^j-1} F_{-(2^j+s)} e^{-i2\pi s k/2^j}, \quad k = 0 \text{ až } 2^j - 1. \quad (2.211)$$

Záporný index frekvenčního koeficientu  $F_{-(2^j+s)}$  je vyvolán skutečností, že jde o diskretní ekvivalent  $F(-\omega)$ . Poněvadž diskretní Fourierova transformace nemá záporné indexy, nahradíme  $F_{-s}$  výrazem  $F_{N-s}$ , což je vzhledem ke kruhové vlastnosti DFT možné, a tak pro vztah (2.211) dostaneme

$$\tilde{a}_{2^j+k} = \sum_{s=0}^{2^j-1} F_{N-(2^j+s)} e^{-i2\pi s k/2^j}, \quad k = 0 \text{ až } 2^j - 1. \quad (2.212)$$



(a)



(b)

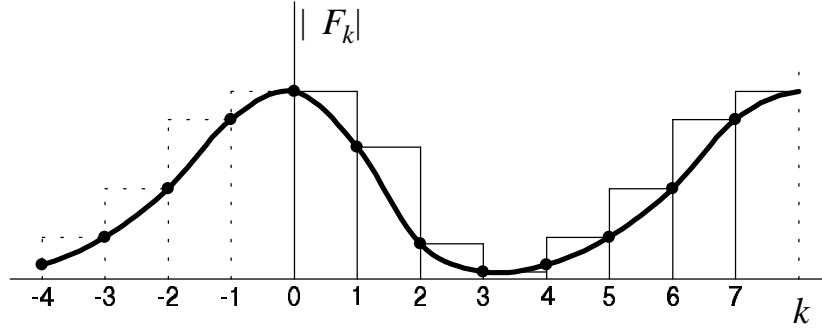
Obr. 2.26: FFT algoritmus pro výpočet harmonické waveletové transformace: (a) pro posloupnost 16-ti reálných prvků; (b) pro posloupnost 16-ti komplexních prvků.

Pro  $N = 16$  je na obr. 2.26 znázorněn vývojový diagram algoritmu jak pro případ (a) reálné posloupnosti  $f_r$ , tak pro případ (b) komplexní posloupnosti  $f_r$ . V případě (a) není nutné počítat koeficienty  $\tilde{a}_{2^j+k}$ , neboť jsou komplexně sdružené s koeficienty  $a_{2^j+k}$ .

Speciálním případem v algoritmu je výpočet amplitud  $a_0$  a  $a_{N/2}$ .

Nejprve uvažujme  $a_0$ , které odvodíme z diskrétního tvaru rovnice (2.201). Poněvadž





Obr. 2.27: Uspořádání diskrétních aproximací  $F_k$  Fourierovy transformace  $F(\omega)$ , kde  $\omega_k = 2\pi k$ , zobrazeno pro posloupnost délky  $N = 8$ .

$$\phi(x - k) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega) e^{-i\omega k} e^{i\omega x} d\omega, \quad (2.213)$$

plyne ze vztahu (2.201), že

$$a_{\phi,k} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \phi^*(\omega) e^{-i\omega k} f(x) e^{-i\omega x} = \int_0^{2\pi} d\omega F(\omega) e^{i\omega k}, \quad (2.214)$$

protože  $\Phi(\omega)$  je nulové až na interval  $0 \leq \omega < 2\pi$ , kdy je rovno  $1/2\pi$ . Je-li hodnota  $F(\omega = 0)$  vyjádřena jako  $F_0$ , kde  $F_0 = 4\pi F(\omega = 0)$  (viz obr. 2.27), pak

$$a_{\phi,0} = F_0/2. \quad (2.215)$$

Podobně

$$\tilde{a}_{\phi 0} = F_0/2, \quad (2.216)$$

a tedy

$$a_0 = a_{\phi 0} + \tilde{a}_{\phi 0} = F_0. \quad (2.217)$$

Nyní uvažujme  $a_{N/2}$ . To je prvek, který není zahrnut ani do vztahu (2.210) ani do vztahu (2.212), viz obr. 2.26. Abychom zajistili platnost Parsevalova teorému; tj. suma čtverců waveletových amplitud se musí rovnat střední kvadratické hodnotě  $f_r$ ,  $1/N \sum_{r=0}^{N-1} f_r^2$  musí být  $a_{N/2} = F_{N/2}$  (viz obr. 2.26). Důvod je následující. Počáteční operace FFT, která transformuje  $f_r$  na  $F_k$ , zachovává střední kvadratickou hodnotu; tj.  $\sum_{k=0}^{N-1} |K_k|^2 = 1/N \sum_{k=0}^{N-1} |f_r|^2$  (viz Problém 6(ii)). Každá následující operace IFFT na oktávních pásmech  $F_k$  pro  $k < N/2$  (nebo jeho komplexní sdruženost na oktávních pásmech pro  $k > N/2$ ) podobně zachovává střední kvadratickou hodnotu v oktávních pásmech, take např.  $1/2^j \sum_{k=0}^{2^j-1} |a_{2^j+k}|^2 = \sum_{k=0}^{2^j-1} |F_{2^j+k}|^2$ . Proto volbou  $a_0 = F_0$  a  $a_{N/2} = F_{N/2}$ , dostaneme Parsevalův teorém ve tvaru

$$|a_0|^2 + \sum_{j=0}^{n-2} 1/2^j \sum_{k=0}^{2^j-1} (|a_{2^j+k}|^2 + |a_{N-2^j-k}|^2) + |a_{N/2}|^2 = 1/N \sum_{r=0}^{N-1} |f_r|^2, \quad (2.218)$$

kde  $N = 2^n$ . Sumace se provádí přes všechny úrovně  $j = 0$  až  $n - 2$ , nejvyšší úroveň  $n - 2$  je maximum, kterého lze dosáhnout s počáteční posloupností délky  $2^n$ . Např. pro počáteční posloupnost na obr. 2.26 délky  $2^4 = 16$  mohou být vypočteny harmonické waveletové amplitudy pouze v úrovních  $-1, 0, 1$  a  $n - 2 = 2$ . Naopak u waveletů odvozených z dilatačních rovnic může být dosaženo až úrovně  $n - 1 = 3$ . Což je způsobeno tím, že pro každý pár  $j, k$  existuje jeden (reálný) dilatační wavelet, zatímco reálné harmonické wavelety existují dva (sudý a lichý wavelet daný reálnou a imaginární částí komplexního harmonického waveletu).

Waveletová amplituda  $a_{N/2} = F_{N/2}$  definuje posloupnost  $f_r$ , která je, z inverzní diskretní Fourierovy transformace, dána jako

$$f = [ 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad \dots ]. \quad (2.219)$$

Lze ukázat, že tato posloupnost je ortogonální k libovolné diskretní harmonické  $e^{i2\pi kr/N}$ ,  $r = 0$  až  $N - 1$ ,  $k = 0$  až  $N/2 - 1$ . Poněvadž všechny diskretní harmonické wavelety vyžadují sumaci diskretních harmonických, vyplývá z toho, že posloupnost (2.219) je ortogonální se všemi diskretními harmonickými wavelety. Tedy posloupnost (2.219) můžeme považovat za dodatečný wavelet v místě Nyquistovy frekvence, který je rozprostřen po celé délce posloupnosti,  $r = 0$  až  $N - 1$ .

Algoritmus uvedený na obr. 2.26 tedy ilustruje rychlý způsob výpočtu diskretní harmonické waveletové transformace. Pro zpětnou transformaci lze využít stejný diagram, u kterého ale budeme postupovat obráceně, zdola nahoru.

Mallatův pyramidální algoritmus (2.151) pro wavelety odvozené z dilatačních rovnic je sekvenčním algoritmem. To znamená, že v jednotlivých krocích (sekvencích) se počítají jednotlivé waveletové úrovně. Naopak FFT algoritmus pro harmonické wavelety je paralelním algoritmem. FFT je implementována na celou posloupnost najednou. Následně lze opět najednou vypočítat všechny Fourierovy transformace na oktákových blocích. Což je velice výhodné v aplikacích, kde se vyskytují dlouhé posloupnosti nebo kde je vyžadováno zpracování v reálném čase.

V Dodatku jsou uvedeny programy v MATLABu pro harmonickou waveletovou transformaci. Diskretní harmonická waveletová transformace  $a$  posloupnosti  $f$  délky  $2^n$ , jejíž prvky mohou být i komplexní, se vypočte funkcí  $hwtdn(f)$  a její inverze funkcí  $ihwtdn(a)$ . Matice  $A$  pro mapu harmonických waveletů se vypočte funkcí  $hmapdn(f)$ . V tomto případě má  $A$   $n + 1$  řádků a  $2^{n-2}$  sloupců (na rozdíl od funkce  $mapdn(f)$ , která vytvoří pole s  $n + 1$  řádky a  $2^{n-1}$  sloupci), což vyplývá ze skutečnosti, že  $A$  je pole, jehož typický prvek je  $|a_{2^j+k}|^2 + |a_{N-2^j-k}|^2$  a v úrovni  $y = n - 2$  je rozsah  $k$  roven  $k = 0$  až  $2^{n-2}$ . Pro úroveň  $n - 1$  jsou všechny prvky v řádku  $n + 1$  rovny právě  $|a_{N/2}|^2$ . Dvourozměrné transformace lze získat použitím jednorozměrných transformací stejnou strategií jako u dilatačních waveletů.

## 3 ZÁVĚR

Obsahem této zprávy je popis waveletové transformace, která patří mezi rychle se rozvíjející nástroje pro analýzu signálů. Mezi nejpoužívanější aplikace patří: detekce nespojitostí (využívá především její vynikající lokalizační vlastnosti), komprese signálů (audio signály, video signály, statické obrazy), odstraňování šumu ze signálu a rychlé algoritmy pro maticové operace.

Ve zprávě je popsána základní myšlenka waveletů, dilatační rovnice a dilatační wavelety, vlastnosti waveletových koeficientů, diskrétní waveletová transformace a její vlastnosti, dvourozměrná waveletová transformace a harmonické wavelety.

V následujících zprávách budou shrnuty naše zkušenosti s aplikací waveletové transformace na problémy analýzy signálů akustické emise. Půjde zejména o problémy komprese a odšumění signálů AE a stanovení počátku jednotlivých emisních událostí. Při těchto problémech bude třeba zodpovědět otázky typu: jaký druh bazového waveletu je pro danou úlohu nejvhodnější; jakou zvolit úroveň dekompozice; jaký zvolit algoritmus komprese a odšumění; atd. Tyto úlohy budou vyšetřovány waveletovým toolboxem od firmy Mathworks, který je od července řešitelům grantu k dispozici a který zahrnuje širokou škálu typů waveletů.

## 4 DODATEK

V tomto dodatku jsou uvedeny programy pro výpočet a zobrazení waveletových transformací, které používají metody popsané v této zprávě.

Ukazuje se jako velice výhodné programovat v jazyce MATLAB (produkt firmy The MathWorks Inc.), což je interaktivní softwarové prostředí pro vědecké a inženýrské numerické výpočty používající matice, u nichž se nevyžaduje dimenzování. Samozřejmě že jde tyto programy přepsat do Fortranu nebo nějakého jiného vyššího jazyka, ale výsledné programy budou těžkopádné.

M-soubor je soubor, který obsahuje normální příkazy MATLABu. M-soubory mohou mít, tak jako funkce, vstupní a výstupní argumenty. Proměnné, které jsou definované a užívané uvnitř souboru zůstávají lokální. Dále je popsáno deset M-souborů:

**function a=wavedn(f,N)**

počítá waveletovou transformaci a pole  $f$  s  $2^n$  prvky, přičemž používá wavelet s  $N$  koeficienty

**function f=iwavedn(a,N)**

počítá inverzní waveletovou transformaci  $f$  pole  $a$  s  $2^n$  prvky, přičemž používá wavelet s  $N$  koeficienty

**function A=displayn(f,N)**

počítá a zobrazuje jednorozměrnou waveletovou transformaci pole  $f$  s  $2^n$  prvky; každý řádek  $A$  (s  $n + 1$  řádky a  $2^n$  sloupci) představuje příspěvek k rekonstruovanému signálu v každé úrovni waveletové transformace

**function A=mapdn(f,N)**

počítá dvourozměrné pole  $A$ , které definuje mapu středních kvadratických hodnot waveletové transformace pole  $f$  s  $2^n$  prvky, wavelet má  $N$  koeficientů a pole  $A$  má  $n + 1$  řádků a  $2^{(n-1)}$  sloupců

**function A=wave2dn(F,N)**

počítá waveletovou transformaci  $A$  dvourozměrného pole  $F$ , přičemž používá wavelet s  $N$  koeficienty;  $A$  i  $F$  mají rozměr  $2^{n1} \times 2^{n2}$

**function F=iwave2dn(A,N)**

počítá inverzní waveletovou transformaci  $F$  dvourozměrného pole  $A$ , přičemž používá wavelet s  $N$  koeficienty;  $A$  i  $F$  mají rozměr  $2^{n_1} \times 2^{n_2}$

**function c=dcoeffs(N)**

počítá pole  $N$  koeficientů ( $N$  je sudé), které požaduje waveletová transformace; tato funkce je volána výše uvedenými funkcemi

**function a=hwt dn(f)**

počítá harmonickou waveletovou transformaci a pole  $f$  s  $2^n$  prvky

**function f=ihwt dn(a)**

počítá inverzní harmonickou waveletovou transformaci  $f$  pole  $a$  s  $2^n$  prvky

**function A=hmap dn(f)**

počítá dvourozměrné pole  $A$ , které definuje mapu středních kvadratických hodnot harmonických waveletů pole  $f$  s  $2^n$  prvky, pole  $A$  má  $n + 1$  řádků a  $2^{(n-2)}$  sloupců

Dále následuje výpis výše zmíněných programů a jejich popis, který zahrnuje účel, syntaxi, použitý algoritmus a případná omezení.

## wavedn, iwavedn

**Účel:** Waveletová transformace a její inverze

**Syntaxe:** a=wavedn(f,N)  
f=iwavedn(a,N)

**Popis:** wavedn(f,N) vrací pole, jehož prvky jsou waveletovou transformací posloupnosti prvků v f. Analyzující wavelet má N koeficientů, kde N je sudé. iwavedn(a,N) je inverzní transformací. item [Algoritmus:] Mallatův pyramidální algoritmus (Mallat [MALL89]; Strang [STRA89]) upravený pro kruhovou transformaci.

**Omezení:** Posloupnost f musí mít  $2^n$  prvků; její transformace má také  $2^n$  prvků. Waveletové koeficienty jsou importovány z M-souboru dcoeffs(N), který je omezen na sudé hodnoty N v rozsahu 2 až 20.

Je-li f komplexní, tj.  $f=fr+i*fi$ , waveletová transformace je také komplexní, tj.  $a=ar+i*ai$ , kde ar je transformace fr a ai je transformace fi, a naopak.

```
function a=wavedn(f,N)
%
% Copyright (c) D. E. Newland 1992, All rights reserved
%

M=length(f);
n=round(log(M)/log(2));
c=dcoeffs(N);
clr=fliplr(c);

for j=1:2:N-1, clr(j)=-clr(j);end

a=f;

for k=n:-1:1
    m=2^(k-1);
    x=[0];y=[0];

    for i=1:1:m
        for j=1:1:N
            k(j)=2*i-2+j;
            while k(j)>2*m, k(j)=k(j)-2*m;end
        end
        z=a(k);
        [mr,nc]=size(z);
```

```

        if nc>1, z=z.';end
        x(i)=c*z;
        y(i)=clr*z;
    end

    x=x/2;y=y/2;
    a(1:m)=x;
    a(m+1:2*m)=y;
end

function f=iwavedn(a,N)
%
% Copyright (c) D. E. Newland 1992, All rights reserved
%

M=length(a);
n=round(log(M)/log(2));
c=dcoeffs(N);

f(1)=a(1);

for j=1:1:N/2
    c1(1,j)=-c(2*j);
    c1(2,j)=c(2*j-1);
    c2(1,j)=c(N-2*j+1);
    c2(2,j)=c(N-2*j+2);
end

for k=1:1:n
    m=2^(k-1);
    for i=1:1:m
        for j=1:N/2
            k(j)=m+i-N/2+j;
            while k(j)< m+1, k(j)=k(j)+m;end
        end
        z=a(k);[mr,nc]=size(z);if nc>1, z=z.';end
        x(2*i-1:2*i)=c1*z;
        zz=f(k-m);
        [mr,nc]=size(zz);
        if nc>1, zz=zz.';end
    end
end

```

```
    xx(2*i-1:2*i)=c2*zz;  
end  
f(1:2*m)=x+xx;  
end
```



## displayn

**Účel:** Zobrazit rekonstrukci (reálného) signálu z jeho waveletové transformace.

**Syntaxe:** A=displayn(f,N)

**Popis:** Používá a=wavedn(f,N) k výpočtu waveletové transformace f, což je posloupnost délky  $2^n$ ; potom se opakovaně používá iwavedn(b,N) pro vytvoření následných řádek matice A, která má  $n + 1$  řádek a  $2^n$  sloupců. Řádek 1 je -1. úroveň rekonstrukce (vždy konstanta), řádek 2 je 0. úroveň rekonstrukce, řádek 3 je 1. úroveň rekonstrukce atd. Všechny řádky A sečteny dohromady vytvoří původní signál f. Výsledky jsou taktéž vykresleny.

**Algoritmus:** Waveletová transformace a je rozdělena do  $n + 1$  přilehlých subpolí délky 1, 1, 2, 4, 8, 16, ...,  $2^{(n-1)}$  prvků. Každé pole b délky  $2^n$  se skládá z nulové matice až na zakrývané subpole a. Odpovídající úroveň rekonstrukce f se získá výpočtem iwavedn(b,N).

**Omezení:** Hodnoty N musí být sudé a v rozsahu od 2 do 20. Signál f musí mít pouze reálné prvky. Instrukce pro kreslení jsou pro MATLAB verze 3.

**Příklad:** f=[-9 -7 4 4 4 12 2 6];

```
A=displayn(f,2);
```

vede na

```
A = 2  2  2  2  2  2  2  2
     -4 -4 -4 -4  4  4  4  4
     -6 -6  6  6  2  2 -2 -2
     -1  1  0  0 -4  4 -2  2
```

```
function A=displayn(f,N)
```

```
%
```

```
% Copyright (c) D. E. Newland 1992, All rights reserved
```

```
%
```

```
M=length(f);
```

```
n=round(log(M)/log(2));
```

```
subplot(211)
```

```
plot(f), grid, title('signal f')
```

```
a=wavedn(f,N);
```

```
plot(a), grid, title(['wavelet transform wavedn(f, ',int2str(N), ')'])
```

```

xlabel('PRESS TO CONTINUE ... AND WAIT PLEASE')

pause

%

b=zeros(1,M);
b(1)=a(1);
A(1,:)=iwavedn(b,N);

for i=2:1:n+1
    b=zeros(1:M);
    b(2^(i-2)+1:2^(i-1))=a(2^(i-2)+1:2^(i-1));
    A(i,:)=iwavedn(b,N);
end

%

j=0;

for i=1:1:n+1
    plot(A(i,:))
    grid, title(['wavelet level ',int2str(i-2)])
    j=j+1;
    if j==2,
        xlabel('PRESS TO CONTINUE'), pause,
        j=j-2;
    end
end

plot(sum(A))

grid, title('Reconstructed signal: all levels added')

xlabel('PRESS TO CONTINUE')

pause

clg, subplot(111)

```

## mapdn

**Účel:** Počítá dvourozměrné pole A, které definuje mapu středních kvadratických hodnot pro jednorozměrné pole f.

**Syntaxe:** A=mapdn(f,N)

**Popis:** Používá a=wavedn(f,N) k výpočtu waveletové transformace f, což je posloupnost délky  $2^n$ ; potom se přetřídí čtverce prvků ( $1 : 2^n$ ) tak, aby tvořily dvourozměrné pole A, které má  $n + 1$  řádků a  $2^{(n-1)}$  sloupců; objem pod touto plochou je úměrný střední kvadratické hodnotě f.

**Algoritmus:** Prvky waveletové transformace jsou přerovnány tak, že každý prvek v matici A je umístěn ve středu jemu odpovídajícímu waveletu. Umístění prvků je (před přerovnáním) je znázorněno na obr. 2.18.

**Omezení:** Hodnoty N musí být sudé a v rozsahu od 2 do 20.

**Příklad:** f=[-9 -7 4 4 4 12 2 6];

```
A=mapdn(f,2)
```

vede na

```
A=  4  4  4  4
    16 16 16 16
    36 36  4  4
    1  0 16  4
```

```
function A=mapdn(f,N)
```

```
%
% Copyright (c) D. E. Newland 1992, All rights reserved
%
```

```
M=length(f);
n=round(log(M)/log(2));
a=wavedn(f,N);
b(1)=a(1);b(2)=a(2);
```

```
for j=1:n-1
  for k=1:2^j
    index=2^j+k+N/2-1;
    while index>2^(j+1), index=index-2^j;end
    b(index)=a(2^j+k);
```

```

    end
end

a=b;

for j=1:2^(n-1)
    A(1,j)=a(1);
end

for j=2:n+1
    for k=1:2^(j-2)
        for m=1:2^(n-j+1)
            A(j,(k-1)*2^(n-j+1)+m)=a(2^(j-2)+k);
        end
    end
end

A=A.*conj(A);

```

## wave2dn, iwave2dn

**Účel:** Dvourozměrná waveletová transformace a její inverze.

**Syntaxe:**  $A = \text{wave2dn}(F, N)$

$F = \text{iwave2dn}(A, N)$

**Popis:**  $\text{wave2dn}(F, N)$  vrací matici, jejíž prvky jsou waveletové transformace prvků v  $F$ . Analyzující wavelet má  $N$  koeficientů, kde  $N$  je sudé.  $\text{iwave2dn}(A, N)$  je inverzní transformace.

**Algoritmus:** Mallatův pyramidální algoritmus (Mallat [MALL89]; Strang [STRA89]) upravený pro kruhovou transformaci.

**Omezení:** Matice  $F$  musí mít rozměry  $2^{n_1} \times 2^{n_2}$ ; její transformace  $A$  má také  $2^{n_1} \times 2^{n_2}$  prvků.

Waveletové koeficienty jsou importovány z  $M$ -souboru  $\text{dcoeffs}(N)$ , který je omezen na sudé hodnoty  $N$  v rozsahu od 2 do 20.

Je-li  $F$  komplexní; tj.  $F = F_r + i * F_i$ , waveletová transformace  $A$  je také komplexní, takže  $A = A_r + i * A_i$ , kde  $A_r$  je transformace  $F_r$  a  $A_i$  je transformace  $F_i$ , a naopak.

```
function A=wave2dn(F,N)
%
% Copyright (c) D. E. Newland 1992, All rights reserved
%

[M1,M2]=size(F);

for k=1:M1
    B(k,:)=wavedn(F(k,:),N);
end

for j=1:M2
    A(:,j)=(wavedn(B(:,j)',' ,N))';
end

function F=iwave2dn(A,N)
%
% Copyright (c) D. E. Newland 1992, All rights reserved
%

[M1,M2]=size(A);

for k=1:M1
    B(k,:)=iwavedn(A(k,:),N);
```

```
end
```

```
for j=1:M2
```

```
    F(:,j)=(iwavedn(B(:,j)'),'N)');
```

```
end
```

## dcoeffs

**Účel:** Vygenerovat N koeficientů požadovaných waveletovou transformací.

**Syntaxe:** `c=dcoeffs(N)`

**Popis:** Vytváří pole s N koeficienty požadovaných waveletovou transformací.

**Algoritmus:** Numerická data jsou odvozena z výsledků publikovaných prof. Daubechies [DAUB88].

**Omezení:** Hodnoty N musí být sudé a v rozsahu od 2 do 20.

```
function c=dcoeffs(N)
%
% Copyright (c) D. E. Newland 1992, All rights reserved
%

if N==2,
    c(1)=1;
    c(2)=1;
end

if N==4,
    c(1)=(1+sqrt(3))/4; % 0.68301270189288
    c(2)=(3+sqrt(3))/4; % 1.18301270189249
    c(3)=(3-sqrt(3))/4; % 0.31698729810776
    c(4)=(1-sqrt(3))/4; % -0.18301270189185
end

if N==6,
    s=sqrt(5+2*sqrt(10));
    c(1)=(1+sqrt(10)+s)/16; % 0.47046720778405
    c(2)=(5+sqrt(10)+3*s)/16; % 1.14111691583131
    c(3)=(5-sqrt(10)+s)/8; % 0.65036500052554
    c(4)=(5-sqrt(10)-s)/8; % -0.19093441556797
    c(5)=(5+sqrt(10)-3*s)/16; % -0.12083220831036
    c(6)=(1+sqrt(10)-s)/16; % 0.04981749973164
end

if N==8,
    c(1)= 0.32580342805144;
    c(2)= 1.01094571509195;
    c(3)= 0.89220013824696;
```

```
c(4)=-0.03957502623584;  
c(5)=-0.26450716736891;  
c(6)= 0.04361630047480;  
c(7)= 0.04650360107114;  
c(8)=-0.01498698933026;  
end
```

```
if N==10  
  c(1) = 0.22641898258329;  
  c(2) = 0.85394354270476;  
  c(3) = 1.02432694425952;  
  c(4) = 0.19576696134736;  
  c(5) =-0.34265671538239;  
  c(6) =-0.04560113188406;  
  c(7) = 0.10970265864207;  
  c(8) =-0.00882680010864;  
  c(9) =-0.01779187010184;  
  c(10)= 0.00471742793840;  
end
```

```
if N==12,  
  c(1) = 0.15774243200275;  
  c(2) = 0.69950381407459;  
  c(3) = 1.06226375988160;  
  c(4) = 0.44583132292976;  
  c(5) =-0.31998659889150;  
  c(6) =-0.18351806405992;  
  c(7) = 0.13788809297429;  
  c(8) = 0.03892320970790;  
  c(9) =-0.04466374833092;  
  c(10)= 0.00078325115207;  
  c(11)= 0.00675606236300;  
  c(12)=-0.00152353380517;  
end
```

```
if N==14,  
  c(1) = 0.11009943074561;  
  c(2) = 0.56079128362564;  
  c(3) = 1.03114849163587;  
  c(4) = 0.66437248221081;  
  c(5) =-0.20351382246331;
```



```
c(6) = -0.31683501128084;  
c(7) = 0.10084646500963;  
c(8) = 0.11400344515963;  
c(9) = -0.05378245258967;  
c(10) = -0.02343994156468;  
c(11) = 0.01774979237922;  
c(12) = 0.00060751499551;  
c(13) = -0.00254790471812;  
c(14) = 0.00050022685316;  
end
```

```
if N==16,  
  c(1) = 0.07695562210801;  
  c(2) = 0.44246724715183;  
  c(3) = 0.95548615042734;  
  c(4) = 0.82781653242210;  
  c(5) = -0.02238573533327;  
  c(6) = -0.40165863278162;  
  c(7) = 0.00066819409256;  
  c(8) = 0.18207635684664;  
  c(9) = -0.02456390104597;  
  c(10) = -0.06235020665057;  
  c(11) = 0.01977215929614;  
  c(12) = 0.01236884481906;  
  c(13) = -0.00688771925624;  
  c(14) = -0.00055400454843;  
  c(15) = 0.00095522971066;  
  c(16) = -0.00016613726120;  
end
```

```
if N==18,  
  c(1) = 0.05385034958950;  
  c(2) = 0.34483430381454;  
  c(3) = 0.85534906435926;  
  c(4) = 0.92954571436587;  
  c(5) = 0.18836954950636;  
  c(6) = -0.41475176180163;  
  c(7) = -0.13695354902480;  
  c(8) = 0.21006834227886;  
  c(9) = 0.04345267546076;  
  c(10) = -0.09564726411973;
```

```
c(11)= 0.00035489281347;  
c(12)= 0.03162416585297;  
c(13)=-0.00667962022663;  
c(14)=-0.00605496057443;  
c(15)= 0.00261296728041;  
c(16)= 0.00032581467203;  
c(17)=-0.00035632975910;  
c(18)= 0.00005564551359;  
end
```

```
if N==20,  
  c(1) = 0.03771715759287;  
  c(2) = 0.26612218279428;  
  c(3) = 0.74557507148686;  
  c(4) = 0.97362811073420;  
  c(5) = 0.39763774176961;  
  c(6) =-0.35333620179367;  
  c(7) =-0.27710987872043;  
  c(8) = 0.18012744853369;  
  c(9) = 0.13160298710167;  
  c(10)=-0.10096657119622;  
  c(11)=-0.04165924808778;  
  c(12)= 0.04696981409691;  
  c(13)= 0.00510043696788;  
  c(14)=-0.01517900233539;  
  c(15)= 0.00197332536489;  
  c(16)= 0.00281768658993;  
  c(17)=-0.00096994783991;  
  c(18)=-0.00016470900591;  
  c(19)= 0.00013235436640;  
  c(20)=-0.00001875841578;  
end
```

## hwtdn, ihwtdn

**Účel:** Harmonická waveletová transformace a její inverze.

**Syntaxe:** a=hwtdn(f)  
f=ihwtdn(a)

**Popis:** hwtdn(f) vrací pole, jehož prvky jsou harmonickou waveletovou transformací posloupnosti prvků v f. ihwtdn(a) je inverzní transformace.

**Algoritmus:** Algoritmus pro výpočet harmonické waveletové transformace používá fft.

**Omezení:** Posloupnost f musí mít  $2^n$  prvků; její transformace má také  $2^n$  prvků. Prvky f mohou být reálné nebo komplexní; prvky a jsou komplexní.

```
function a=hwtdn(f)
%
% Copyright (c) D. E. Newland 1992, All rights reserved
%

N=length(f);
n=round(log(N)/log(2));

F=fft(f)/N;

a(1)=F(1);a(2)=F(2);

for j=1:n-2
    a(2^j+1:2^(j+1))=ifft(F(2^j+1:2^(j+1)))*2^j;
    a(N-2^(j+1)+2:N-2^j+1)=fliplr(fft(fliplr(F(N-2^(j+1)+2:N-2^j+1))));
end

a(N/2+1)=F(N/2+1);
a(N)=F(N);

function f=ihwtdn(a)
%
% Copyright (c) D. E. Newland 1992, All rights reserved
%

N=length(a);
n=round(log(N)/log(2));
```

```

F(1)=a(1);F(2)=a(2);

for j=1:n-2
    F(2^j+1:2^(j+1))=fft(a(2^j+1:2^(j+1)))/2^j;
    F(N-2^(j+1)+2:N-2^j+1)=fliplr(ifft(fliplr(a(N-2^(j+1)+2:N-2^j+1))));
end

F(N/2+1)=a(N/2+1);
F(N)=a(N);

f=ifft(F)*N;

```

## hmapdn

**Účel:** Počítá dvourozměrné pole  $A$ , které definuje mapu středních kvadratických hodnot harmonických waveletů pro jednorozměrné pole  $f$ .

**Syntaxe:**  $A=hmapdn(f)$

**Popis:** Užívá  $a=hwtndn(f)$  k výpočtu harmonické waveletové transformace  $f$ , což je posloupnost délky  $2^n$ ; potom přetřídí čtverce prvků  $(1 : 2^n)$  tak, aby tvořily dvourozměrné pole  $A$ , které má  $n + 1$  řádků a  $2^{(n-2)}$  sloupců; objem pod touto plochou je úměrný střední kvadratické hodnotě  $f$ .

**Algoritmus:** Každý prvek  $A$  je součtem čtverců modulů  $a(r)$  a  $a(N+2-r)$ ,  $r=2$  až  $N/2$ ;  $a(1)$  a  $a(N/2+1)$  jsou speciální případy.

**Omezení:** Délka posloupnosti  $f$  musí být mocninou dvou. Prvky  $f$  mohou být reálné nebo komplexní.

```
function A=hmapdn(f)
%
% Copyright (c) D. E. Newland 1992, All rights reserved
%

N=length(f);
n=round(log(N)/log(2));
a=hwtndn(f);

%

for j=1:2^(n-2)
    A(1,j)=abs(a(1))^2;
    A(n+1,j)=abs(a(2^(n-1)+1))^2;
end

for j=2:n
    for k=1:2^(j-2)
        for m=1:2^(n-j)
            A(j,(k-1)*2^(n-j)+m)=
                abs(a(2^(j-2)+k))^2+abs(a(N+2-2^(j-2)-k))^2;
        end
    end
end
end
```

## 5 PROBLÉMY

1.

Nalezněte řešení rovnice (2.1) pro následující případy:

i.  $c_0 = c_1 = 1, c_2 = c_3 = 0$ ;

ii.  $c_0 = c_2 = \frac{1}{2}, c_1 = 1, c_3 = 0$ ;

iii.  $c_0 = 2, c_1 = c_2 = c_3 = 0$ ;

iv.  $c_0 = c_2 = 1, c_1 = c_3 = 0$ .

*Rada:* Zkoumejte výsledek iterace (2.2), ve které na počátku použijte obdélníkovou funkci  $\phi_0(x) = 1, 0 \leq x < 1$ .

Pomocí získaných škálovacích funkcí vygenerujte wavelety. Viz vztah (2.12), kde  $N$  je počet nenulových waveletových koeficientů (Pozor, v případě (iv) je  $N = 3$ ).

Haarův wavelet (i) je nejjednodušší užívaný wavelet. Povšimněte si, že

$$\int_0^1 W(x)W(2x) dx = \int_0^1 W(x)W(2x-1) dx = 0,$$

takže se jedná o ortogonální wavelet. Wavelet *obrácený mexický klobouk* (ii) není ortogonální, neboť např.

$$\int_0^2 W(x)W(2x) dx \neq 0.$$

Výsledky z (iii) a (iv) jsou kuriozity. Delta funkce z (iii) a hřebenová funkce (iv) neposkytují užitečnou bázi funkcí pro rozklad signálu.

*Výsledky:*

i.  $\phi(x) = 1, 0 \leq x < 1$ ,

ii.  $\phi(x) = x, 0 \leq x < 1$ ,  
 $\phi(x) = 2 - x, 1 \leq x < 2$ ,

iii.  $\phi(x) = \delta(x)$ ,

iv.  $\phi(x)$  je hřebenová funkce na intervalu  $0 \leq x < 2$ , pro kterou platí, že  $\int_0^2 \phi(x) dx = 1$ .

Odpovídající wavelety jsou následující:

i. Haar:  $W(x) = -1, 0 \leq x < \frac{1}{2}, \quad W(x) = +1, \frac{1}{2} \leq x < 1$ ,

ii. Obrácený mexický klobouk:  $W(x) = x, 0 \leq x < \frac{1}{2}, \quad W(x) = 2 - 3x, \frac{1}{2} \leq x < 1$  a jeho zrcadlový obraz okolo  $x = 1$  pro  $1 \leq x < 2$ .

iii.  $W(x) = \delta(x)$ ,

iv.  $W(x) = \phi(x)$ .

## 2.

Rekursivní metoda je metoda, ve které může být *přesně* určen jeden nebo více členů posloupnosti, pokud jsou známy členy ostatní. Místo hledání škálovací funkce  $\phi(x)$  iteračně, dokud není splněno konvergenční kritérium, lze použít alternativní postup, který spočívá v nalezení přesných dílčích hodnot  $\phi(x)$  a navržení rekursivního schématu, kterým se všechny ostatní hodnoty z těchto přesných hodnot naleznou.

Uvažujme definici (2.1) zapsanou v kompaktním tvaru

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^3 c_k \phi(2x - k),$$

ze kterého po substituci  $x$  za  $x/2$  dostaneme

$$\phi(x/2) = \sum_{k=0}^3 c_k \phi(x - k). \tag{5.1}$$

Pokud jsou známy:  $\phi(x)$ ,  $\phi(x - 1)$ ,  $\phi(x - 2)$  a  $\phi(x - 3)$ , potom můžeme  $\phi(x/2)$  nalézt přesně. Pro čtyři nenulové waveletové koeficienty je  $\phi(x)$  nulové pro  $x \leq 0$  a  $x \geq 3$  (viz obr. 2.4). Lze dokázat, že jde o obecný výsledek. Předpokládejme, že budeme znát  $\phi(0)$ ,  $\phi(1)$ ,  $\phi(2)$  a  $\phi(3)$ . Víme, že  $\phi(-1)$ ,  $\phi(4)$ , atd. jsou všechny nulové. Proto můžeme podle vztahu (5.1) vypočítat

$$\phi(1/2), \phi(3/2), \phi(5/2).$$

Opětovným použitím vztahu (5.1) a těchto nových hodnot získáme

$$\phi(1/4), \phi(3/4), \phi(5/4), \phi(7/4), \phi(9/4), \phi(11/4)$$

atd., dokud nejsou nalezena všechna  $\phi(x)$  pro požadovaná  $x$ .

Nyní již jen zbývá stanovit prvotní hodnoty pro rekursivní schéma, tj.  $\phi(0)$ ,  $\phi(1)$ ,  $\phi(2)$  a  $\phi(3)$ . Na obr. 2.4 vidíme, že  $\phi(0) = \phi(3) = 0$ . Použijme vztah (5.1) k vyjádření  $\phi(1)$  pomocí  $\phi(2)$  a  $\phi(-1)$ . Zjistíme, že

$$\frac{\phi(1)}{\phi(2)} = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}.$$

Stejný výsledek obdržíme, pokud použijeme vztah (5.1) k vyjádření  $\phi(2)$  pomocí  $\phi(4)$  a  $\phi(1)$ . Měřítka  $\phi(x)$  je libovolné, zvolme tedy např.

$$\phi(1) = (1 + \sqrt{3}) / 2$$

a

$$\phi(2) = (1 - \sqrt{3}) / 2.$$

Použijte rekurse k ručnímu nalezení

$$\phi(1/4), \phi(1/2), \phi(3/4), \dots, \phi(11/4).$$

Vytvořte program pro tento výpočet a použijte ho k ověření obr. 2.5. Použijte vztah (2.5) a ručně nalezněte hodnoty  $W(1)$ ,  $W(3/2)$ ,  $W(2)$ . Potom vytvořte program využívající této rovnice k výpočtu  $W(x)$  z  $\phi(x)$  a zkontrolujte obr. 2.6.

*Výsledky:*

$$\phi(1/2) = (2 + \sqrt{3}) / 4$$

$$\phi(3/2) = 0$$

$$\phi(5/2) = (2 - \sqrt{3}) / 4$$

$$\phi(1/4) = (5 + 3\sqrt{3}) / 16$$

$$\phi(3/4) = (9 + 5\sqrt{3}) / 16$$

$$\phi(5/4) = (1 + \sqrt{3}) / 8$$

$$W(1) = (-1 + \sqrt{3}) / 2$$

$$\phi(7/4) = (1 - \sqrt{3}) / 8$$

$$\phi(9/4) = (9 - 5\sqrt{3}) / 16$$

$$\phi(11/4) = (5 - 3\sqrt{3}) / 16$$

$$W(3/2) = -\sqrt{3}$$

$$W(2) = (1 + \sqrt{3}) / 2$$

### 3.

Ověřte, že maticová rovnice (2.7) správně generuje 10 waveletových souřadnic uvedených nad rovnicí (2.7) a zkontrolujte, že vztah (2.8) produkuje stejné výsledky a je tudíž identický se vztahem (2.7). Podobně ověřte, že vztahy (2.9) a (2.10) poskytují identické výsledky.

### 4.



Je-li  $P(\xi)$  Fourierova transformace škálovací funkce  $\phi(x)$ , pak podle vztahu (2.25) je vždy možné zapsat  $P(\xi)$  jako nekonečný součin

$$P(\xi) = p(\xi/2)p(\xi/4)p(\xi/8) \dots (1/2\pi), \quad (5.2)$$

kde

$$p(\xi) = \frac{1}{2} \sum_k c_k e^{-i\xi k} \quad (5.3)$$

a  $c_k$  jsou waveletové koeficienty, které se objevují v dilatační rovnici (2.11).

- i. Vyšetřete tvar funkce  $p(\xi)$  pro koeficienty waveletu D4 definované vztahem (2.3). Sestavte program pro grafické znázornění reálné a imaginární části  $p(\xi)$  vzhledem ke  $\xi$  na intervalu  $0 \leq \xi \leq 9$ .
- ii. Zkontrolujte podle vztahu (2.9), že  $p(\xi)$  a  $(d/d\xi)p(\xi)$  jsou nulové pro  $\xi = \pi$  a ověřte, že se to shoduje s grafem z části (i).
- iii. Zkontrolujte, že  $p(\xi/2)$  a jeho derivace jsou nulové pro  $\xi = 2\pi, 6\pi, 10\pi$ , atd.; dále že  $p(\xi/4)$  a jeho derivace jsou nulové pro  $\xi = 4\pi, 12\pi, 20\pi$ , atd.; a že  $p(\xi/8)$  a jeho derivace jsou nulové pro  $\xi = 8\pi, 24\pi, 40\pi$ , atd.
- iv. Upravte program z části (i) pro výpočet součinu  $p(\xi/2)p(\xi/4)p(\xi/8)$  a vykreslete jeho reálnou a imaginární část na intervalu  $0 \leq \xi \leq 35$ .

## 5.

Použijte program  $a=wavedn(f,N)$  k výpočtu waveletových transformací pro  $N = 2, 4, 6, 20$  následujících posloupností :

- i.  $f(j) = 1$ ,
- ii.  $f(j) = (j/512)^2 - 2(j/512)^3 + (j/512)^4$ ,
- iii.  $f(j) = \sin(2\pi(j-1)/64)$ ,
- iv.  $f(j) = \sin(2\pi(j-1)/50)$ .

kde  $j$  nabývá hodnot od 1 do 512. Pro každý případ vykreslete  $f$  a  $a$  a zjistěte, jak se mění prvky  $a$  se vzrůstajícím počtem waveletových koeficientů  $N$ .

Pro případ (ii) vykreslete  $\log_{10}|a(r)|$  pro  $N = 2, 4, 6$  a 20 a porovnejte. Proč vykazuje výsledek pro  $N = 20$  špičky waveletové amplitudy v místech  $x = 0$  a  $x = 1$ ?

Vypočtete  $f=iwavedn(a,4)$ , kde  $a(r) = 0$  pro  $r = 1$  až 512 mimo  $r = 5, 9, 17, 33, 65, 129$  a 257, kde  $a(r) = 1$ .

*Výsledky:*

Uvažujme funkci  $f(j)$  jako výsledek vzorkování funkce  $f(x) = x^2 - 2x^3 + x^4$ . V bodech  $x = 0$  a  $x = 1$  jsou  $f(x)$ ,  $f'(x)$  a  $f''(x)$  stejné, ale  $f'''(0) = -12$  a  $f'''(1) = +12$ . Tedy při zatočení signálu existuje nespojitost, která je příčinou lokálních špiček v grafu  $\log_{10}|a(r)|$  vzhledem k  $r$ .

## 6.

Použijte program  $f=iwavedn(a,N)$  k výpočtu zpětných waveletových transformací následujících posloupností :

- i.  $a(r) = 0$ ,  $r = 1$  až 512, mimo  $a(24) = 1$  pro  $N = 2, 4, 6, 10$  a 20. Všimněte si, že se vzrůstajícím  $N$  se mění relativní pozice středu waveletu. V této 4. úrovni existuje  $2^4 = 16$  přilehlých waveletů v jednotkovém intervalu. Pro první wavelet (nejvíce vlevo) platí  $a(17) = 1$ .
- ii. Vypočtete wavelet, pro který  $a(r) = 0$ ,  $r = 1$  až 512 mimo  $a(17) = 1$ , pro  $N = 20$ . Délka waveletu pro  $N = 20$  je 19 intervalů, pro které v tomto případě platí  $\Delta x = 19/16$ , takže wavelet se obtáčí okolo intervalu  $0 \leq x \leq 1$ . Střed waveletu leží uprostřed 9. intervalu, který je v bodě  $x = 19/32$ . Pro 512 bodů je střed waveletu v bodě  $512(19/32) = 304$ .
- iii. Vyznačte souřadnici 304 na grafu z předchozí části.
- iv. Použijte  $f(j)$ ,  $j = 1$  až 512, vypočítané v části (ii) a vypočtete  $A = mapdn(f, 20)$ . Použijte z MATLABu funkci *contour* pro vykreslení vrstevnicového grafu matice  $A$ . Ověřte, že střed nenulového bloku matice  $A$  je  $304/2 = 152$  a že leží na šesté řádce, což odpovídá čtvrté úrovni waveletové transformace.
- v. Vypočtete zpětnou waveletovou transformaci  $f(j)$  pro  $a(r) = 0$ ,  $r = 1$  až 512 mimo  $a(r) = 1$ ,  $r = 17$  až 32. Vyšetřete tuto funkci, vypočtete  $A = mapdn(f, 20)$  a vykreslete její vrstevnicový graf.
- vi. Vypočtete diskrétní Fourierovy transformace  $F$  funkcí  $f$  z částí (iv) a (v) a porovnejte je tak, že vykreslíte  $|F(j)|$  vzhledem k  $j$ . Zkontrolujte, že maximální hodnota  $|F(j)|$  z části (v) se objeví při  $j = 17$ .
- vii. Porovnejte výsledek části (v) se sinusovou vlnou stejné amplitudy a fáze. Vypočtete její DFT a nakreslete pro porovnání s výsledkem části (vi).

## 7.

Vypočtete inverzní waveletovou transformaci  $f(j)$  funkce  $a(r) = 0$ ,  $r = 1$  až 512 mimo  $a(33) = 1$ , pro  $N = 20$ . Porovnejte tuto funkci se sinusovou vlnou, na které je aplikované Gaussovo okénko

$$p(j) = \exp\left(-\frac{(j - 152)^2}{1024}\right) \sin\left(\frac{2\pi(j - 1)}{32}\right), \quad j = 1 \text{ až } 512.$$

Vypočtěte diskrétní Fourierovy transformace  $f(j)$  a  $p(j)$  a porovnejte je. (Vykrejte jejich logaritmus absolutních hodnot.)

# Literatura

- [1] CHUI, C. K.: An Introduction to Wavelets. San Diego, Academic Press 1992.
- [2] CHUI, C. K. aj.: Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications. San Diego, Academic Press 1992.
- [3] DAUBECHIES, I.: Orthonormal Bases of Wavelets with Finite Support - Connection with Discrete Filters. In: Wavelets, Time-Frequency Methods and Phase Space. Red. J. M. Combes, A. Grossmann, Ph. Tchamitchian. Berlin-Heidelberg, Springer-Verlag 1989, s.38-66.
- [4] DAUBECHIES, I.: Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets. Comm. Pure & Appl. Maths, **41**, 1988, s. 909-996.
- [5] DAUBECHIES, I.: The Wavelet Transform, Time-Frequency Localization and Signal Analysis. IEEE Trans. on Information Theory, **36**, 1990, s. 961-1005.
- [6] DAUBECHIES, I.; MALLAT, S.; WILLSKY, A. S.; aj.: Wavelet Transforms and Multiresolution Signal Analysis. Special Issue of IEEE Trans. Information Theory, **38**, 1992, č.2.
- [7] GOUPILLAUD, P., GROSSMANN, A. and MORLET, J.: Cycle-Octave and Related Transforms in Seismic Signal Analysis. Geoprospection, **23**, 1984, s. 85-102.
- [8] HAAR, A.: Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme. Math. Ann., **69**, 1910, s.331-371.
- [9] HEIL, C. E. and WALNUT, D. F.: Continuous and Discrete Wavelet Transforms. SIAM Review, **31**, 1989, s. 628-666.
- [10] MALLAT, S.: A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation. IEEE Trans. Pattern Anal. and Machine Intell., **11**, 1989, s. 674-693.
- [11] MALLAT, S.; ZHONG, S.: Signal Characterization from Multiscale Edges. In: Proc. 10th Int. Conf. on Pattern Recognition. Atlantic City, IEEE Comput. Soc. Press 1990, s. 891-896.
- [12] NEWLAND, D. E.: Wavelet Analysis of Vibration. In: Proc. Structural Dynamics and Vibration Symposium. ASME Energy-Sources Technology Conf., **52**, Houston, 1993, s.1-12.
- [13] NEWLAND, D. E.: Harmonic Wavelet Analysis. Proc. R. Soc. Lond. A, **443**, 1993, s.203-225.
- [14] NEWLAND, D. E.: Some Properties of Discrete Wavelet Maps. Probabilistic Engineering Mechanics, **9**, 1994.

- [15] NEWLAND, D. E.: Harmonic and Musical Wavelets. Proc. R. Soc. Lond. A, 1994.
- [16] NEWLAND, D. E.: An Introduction to Random Vibrations, Spectral and Wavelet Analysis. New York, John Wiley&Sons, Inc. 1994.
- [17] STRANG, G.: Wavelets and Dilation Equations: A Brief Introduction. SIAM Review, **31**, 1989, č. 4, s. 614-627.
- [18] STRANG, G.; FIX, G.: A Fourier Analysis of the Finite Element Variational Method. In: Constructive Aspects of Functional Analysis. Rome, Edizioni Cremonese 1973.
- [19] VILLE, J.: Théorie et Applications de la Notion de Signal Analytique. Câbles et Transmission, **2**, 1948, s. 61-74.
- [20] WIGNER, E. P.: On the Quantum Correction for Thermodynamic Equilibrium. Physical Review, **40**, 1932, s. 749-759.