

# METODY PRO URČENÍ DISPERZNÍCH KŘIVEK LAMBOVÝCH VLN POMOCÍ FOURIEROVY TRANSFORMACE

P. Hora, O. Červená,  
Ústav termomechaniky AV ČR, v.v.i.

Příspěvek vznikl na základě podpory projektu GA ČR č. 101/09/1630  
*Numerické řešení stacionárních a nestacionárních problémů dispersního šíření  
vln v mechanických systémech na různých úrovních*  
a záměru ÚT AV ČR, v.v.i., AV0Z20760514.

## Motivace

Standardní ultrazvukové metody



*guided waves* metody

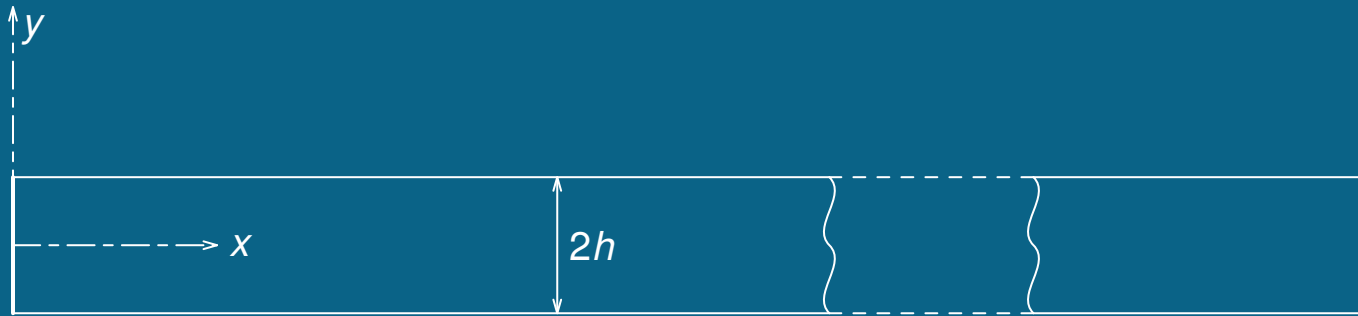
Schopnost *guided waves* metod:

- testovat celou strukturu v jediném měření,
- testovat i nepřístupné oblasti konstrukce.

Nezbytný předpoklad pro úspěšné nasazení *guided waves* metod:

- stanovení průběhu disperzních křivek

## Řešená úloha



### Ocelová deska

délka: 120 mm,

výška: 4 mm,

Youngův modul:  $E = 205$  GPa,

Poissonovo číslo:  $\nu = 0,30$ ,

hustota:  $\rho = 7800$  kg/m<sup>3</sup>.

## COMSOL Multiphysics

- strukturální mechanika, rovinná deformace
- Lagrangeovy – kvadratické prvky

### Časová analýza

- buzení předepsané tabulkou ze souboru
- čas od 0 do 100  $\mu s$  s krokem 0,01  $\mu s$
- relativní tolerance:  $10^{-5}$ , absolutní tolerance:  $10^{-10}$
- čtvercová síť – velikost prvku 0,5×0,5 mm

### Frekvenční analýza

- buzení předepsané tabulkou ze souboru
- frekvence předepsané tabulkou ze souboru
- čtvercová síť – velikost prvku 0,5×0,5 mm

## Metody určení disperzních křivek

### 2D-Fourierova transformace

Aplikace 2D-FT na množinu časových průběhů výchylek z ekvidistantně rozmístěných bodů na povrchu desky.

Časové průběhy mohou být získány jak numericky (např. MKP), tak experimentálně.

### 1D-Fourierova transformace

Aplikace 1D-FT na množinu frekvenčních odezev výchylek z ekvidistantně rozmístěných bodů na povrchu desky.

První (časovou) FT nahrazuje MKP řešením vlnové rovnice v kmitočtové oblasti.

Tyto výpočty jsou řádově rychlejší oproti výpočtům v časové oblasti.

V této metodě je naopak nutné zakončit tlustou desku vhodným absorbérem.

## Algoritmus použití 2D-Fourierovy transformace

$$H(k, f) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i(kx + \omega t)} dx dt.$$

1. Vytvoření pole (sloupcově) z experimentálně nebo numericky získaných časových průběhů výchylek z řady ekvidistantně rozmístěných bodů na povrchu desky.
2. Provedení 1D časové Fourierovy transformace každého sloupce.  
⇒ frekvenční spektrum pro každou pozici
3. Provedení 1D prostorové Fourierovy transformace každého řádku.  
⇒ disperzní závislost ve formě frekvence – vlnové číslo

## Algoritmus použití 1D-Fourierovy transformace

$$H(k, f) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, f) e^{-ikx} dx.$$

1. Vytvoření pole (sloupcově) z numericky získaných frekvenčních odezev výchylek z řady ekvidistantně rozmístěných bodů na povrchu desky.
2. Provedení 1D prostorové Fourierovy transformace každého řádku.  
⇒ disperzní závislost ve formě frekvence – vlnové číslo

## Budící puls

$$y(t) = \frac{1}{2} (1 - \cos(\omega_0 t / N_c)) \sin(\omega_0 t) \quad \text{pro} \quad t \in \langle 0, N_c / f_0 \rangle,$$

kde

$f_0$  ... nosná frekvence,

$\omega_0$  ... nosná úhlová frekvence,

$N_c$  ... počet cyklů,

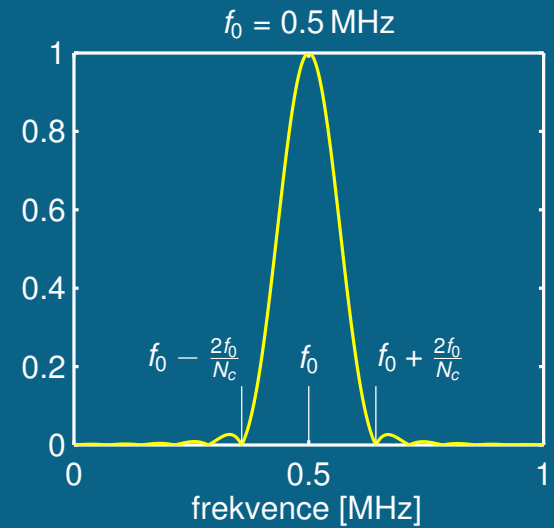
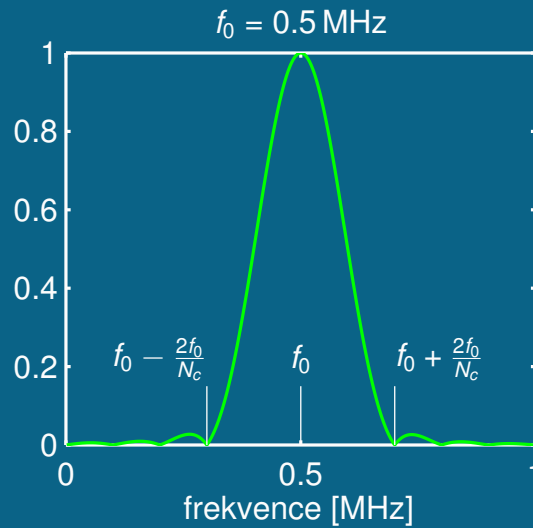
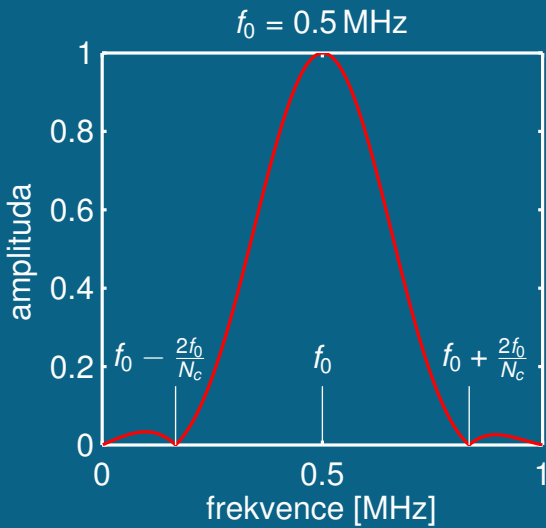
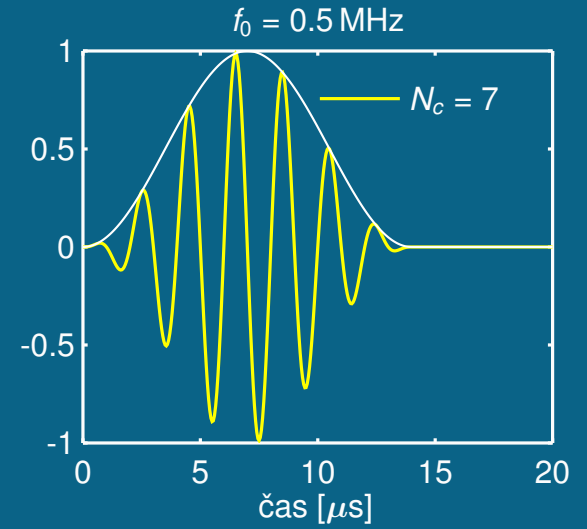
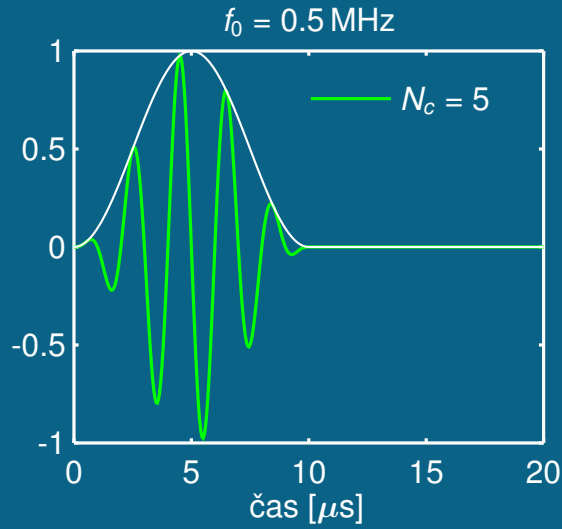
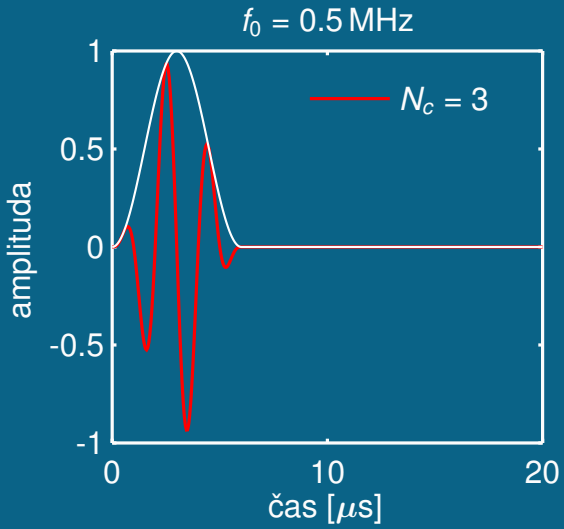
$t$  ... čas.

## Spektrum obálky pulsu

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_0^{N_c / f_0} (1 - \cos(\omega_0 t / N_c)) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{4i\pi^2 f_0^2 \left( e^{i\omega \frac{N_c}{f_0}} - 1 \right) e^{-i\omega \frac{N_c}{f_0}}}{\omega (\omega^2 N_c^2 - 4\pi^2 f_0^2)} \end{aligned}$$



# Budící puls



## Disperzní vztahy

Symetrické módy:

$$\frac{\tan \beta h}{\tan \alpha h} = - \frac{4\alpha\beta k^2}{(k^2 - \beta^2)^2}$$

Antisymetrické módy:

$$\frac{\tan \beta h}{\tan \alpha h} = - \frac{(k^2 - \beta^2)^2}{4\alpha\beta k^2}$$

kde

$$\alpha^2 = \omega^2 / c_1^2 - k^2,$$

$$\beta^2 = \omega^2 / c_2^2 - k^2,$$

$k$  ... vlnové číslo,

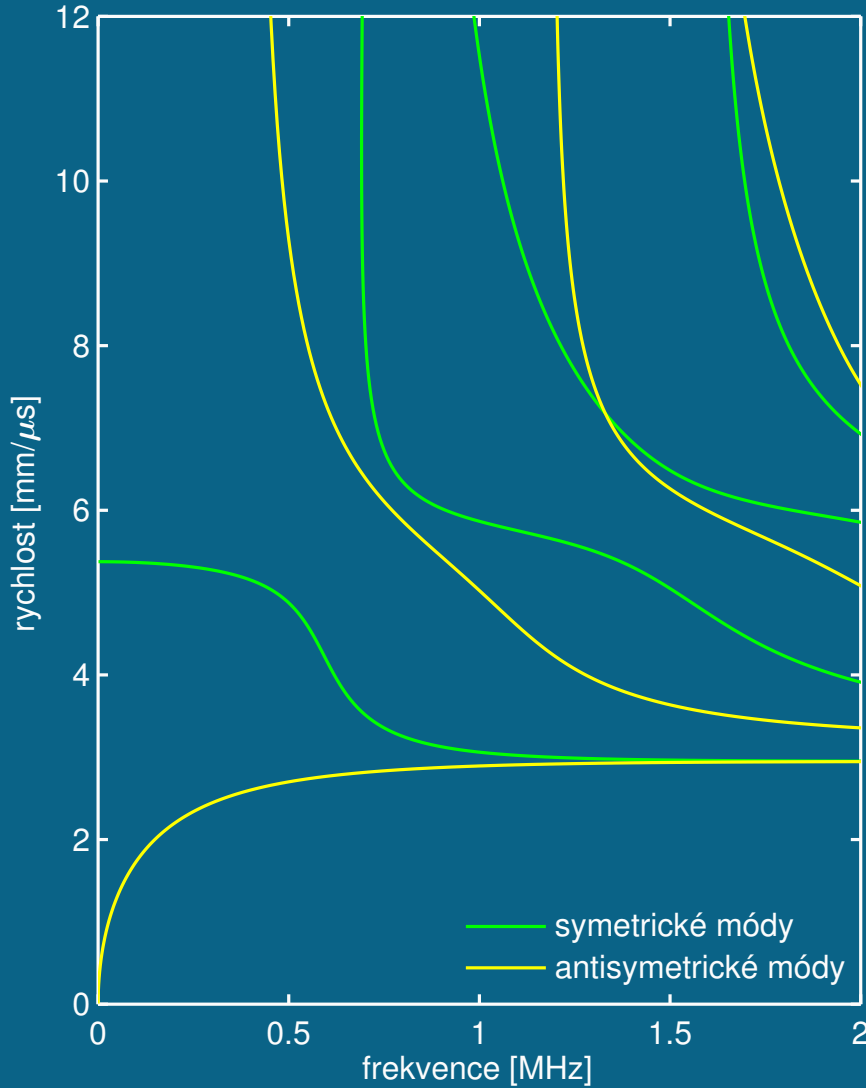
$\omega$  ... úhlová frekvence,

$c_1, c_2$  ... fázové rychlosti,

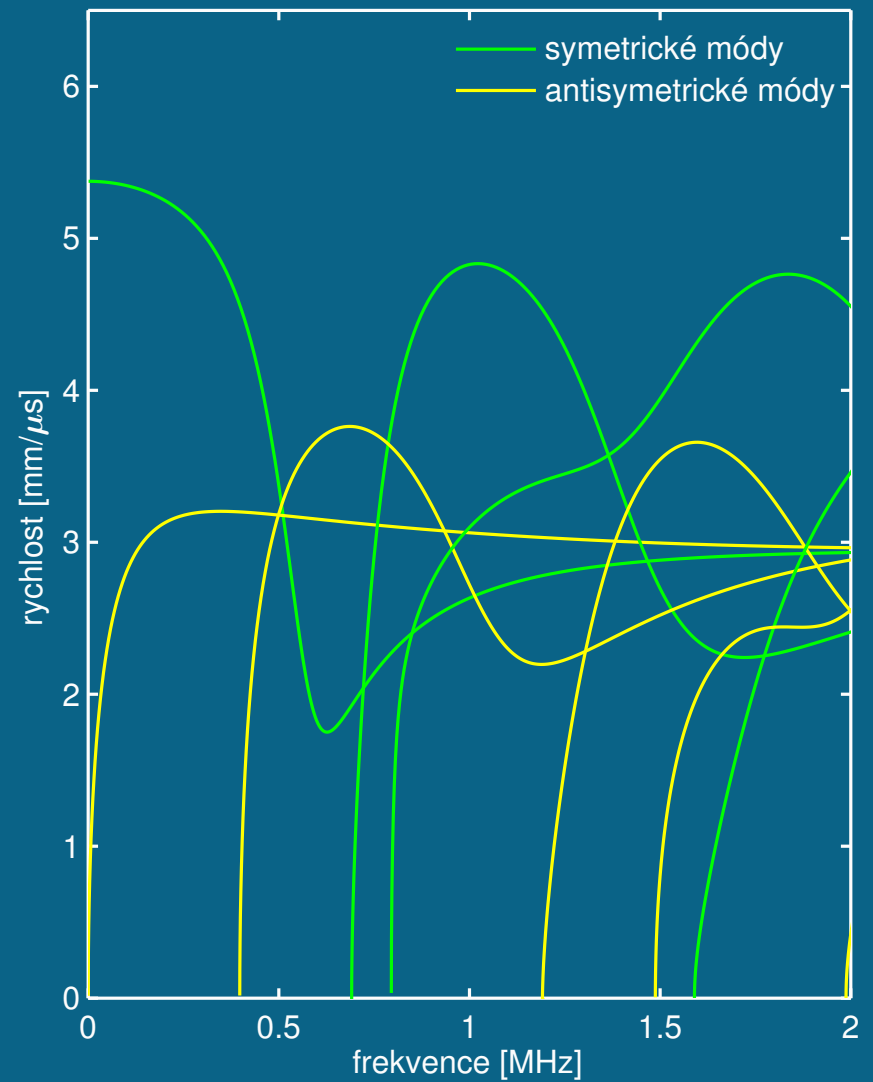
$h$  ... polotloušťka desky.

# Disperzní křivky

fázové rychlosti

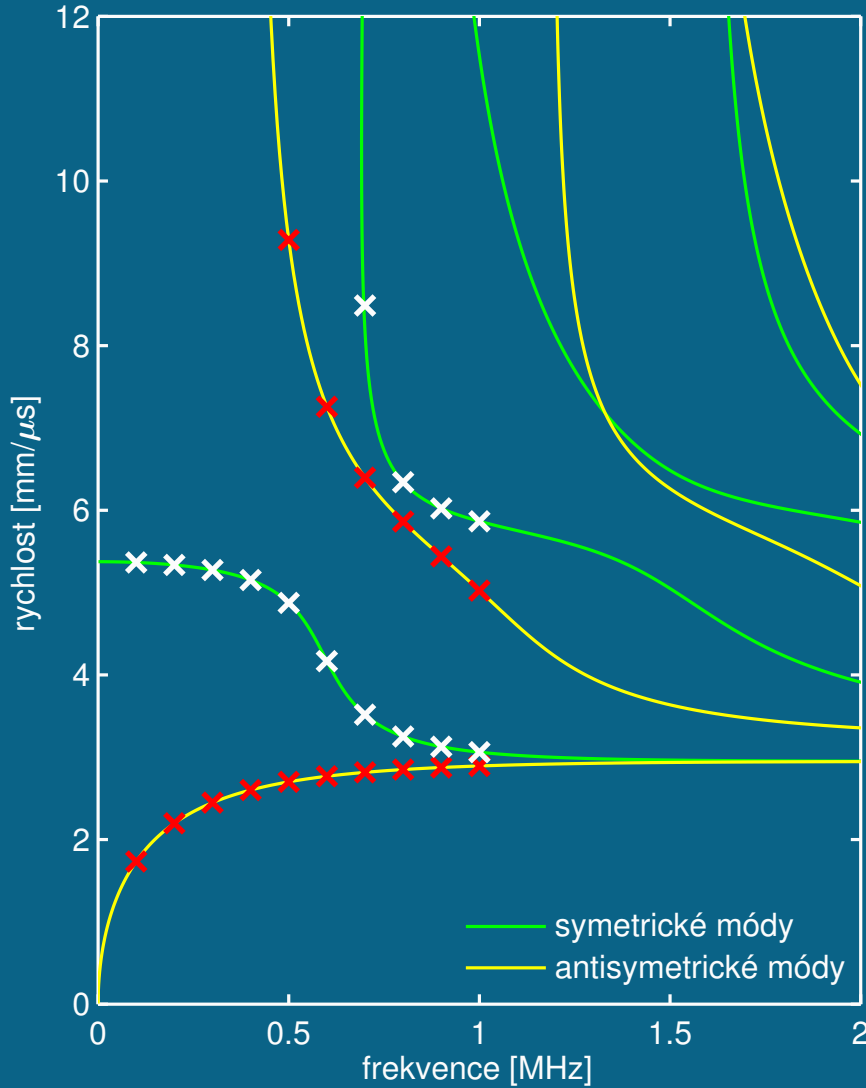


grupové rychlosti

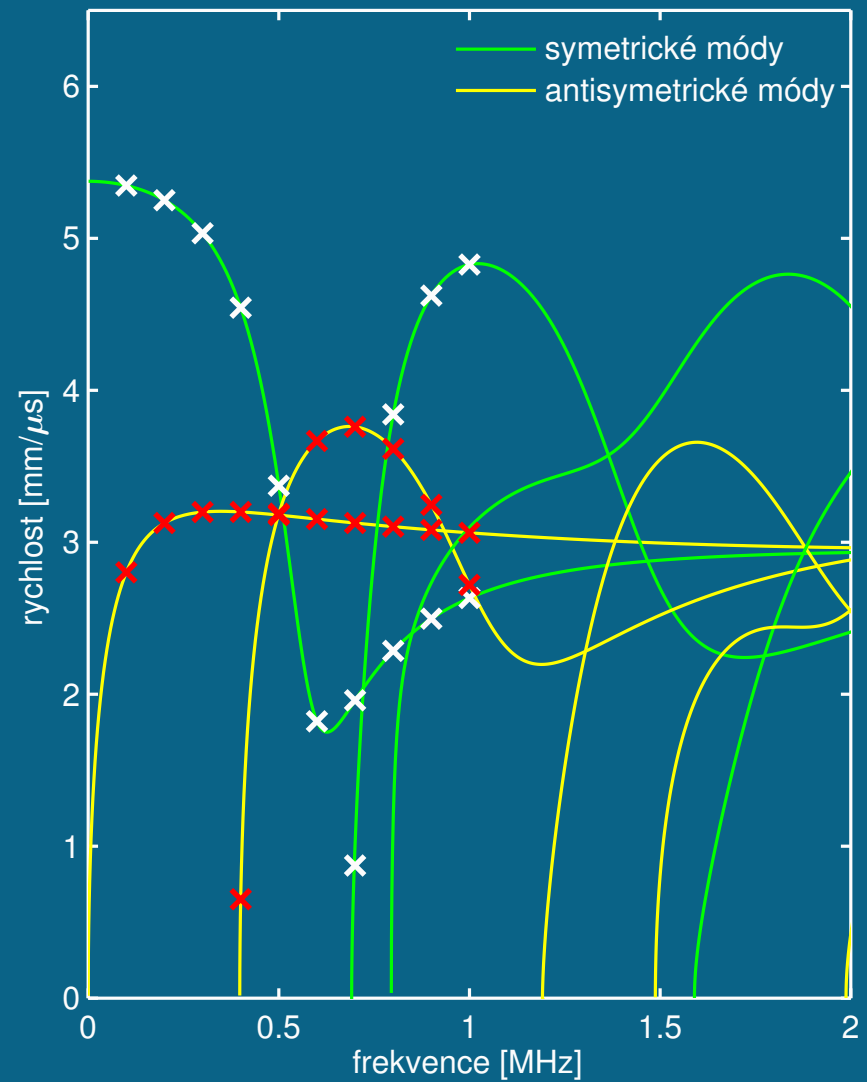


# Disperzní křivky

fázové rychlosti



grupové rychlosti



## Vlastní tvary

Symetrické módy:

$$u_x = A i \beta \left( \frac{\cos \beta y}{\cos \beta h} - \frac{2k^2 \cos \alpha y}{(k^2 - \beta^2) \cos \alpha h} \right) e^{i(kx - \omega t)},$$

$$u_y = A k \left( \frac{\sin \beta y}{\cos \beta h} + \frac{2\alpha \beta \sin \alpha y}{(k^2 - \beta^2) \cos \alpha h} \right) e^{i(kx - \omega t)},$$

Antisymetrické módy:

$$u_x = A i \beta \left( \frac{\sin \beta y}{\sin \beta h} - \frac{2k^2 \sin \alpha y}{(k^2 - \beta^2) \sin \alpha h} \right) e^{i(kx - \omega t)},$$

$$u_y = A k \left( \frac{\cos \beta y}{\sin \beta h} + \frac{2\alpha \beta \cos \alpha y}{(k^2 - \beta^2) \sin \alpha h} \right) e^{i(kx - \omega t)},$$

kde

$x, y$  ... prostorové souřadnice,

$t$  ... čas,

$i$  ... imaginární jednotka,

$A$  ... konstanta.

## Disperzní křivky pomocí 2D-FFT

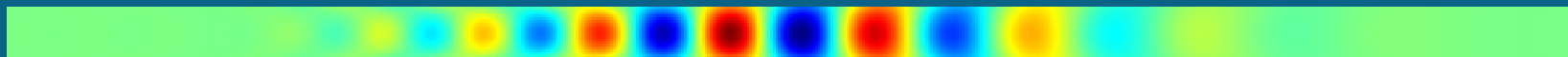
$a_0, u_x$



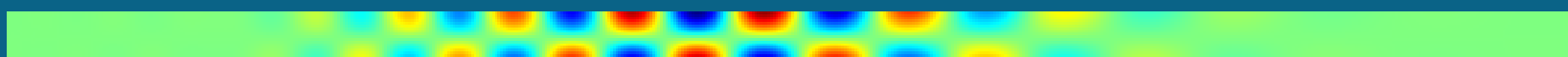
$a_0, u_y$



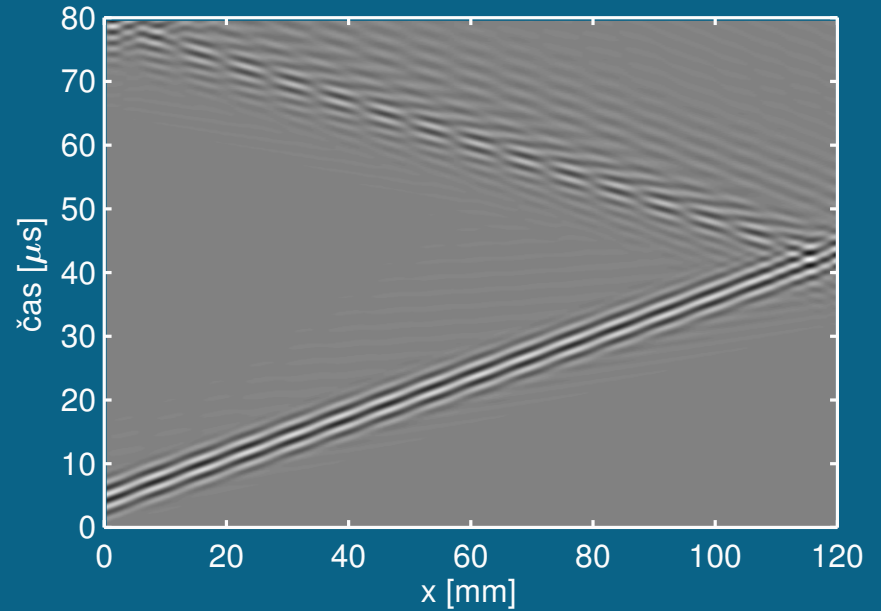
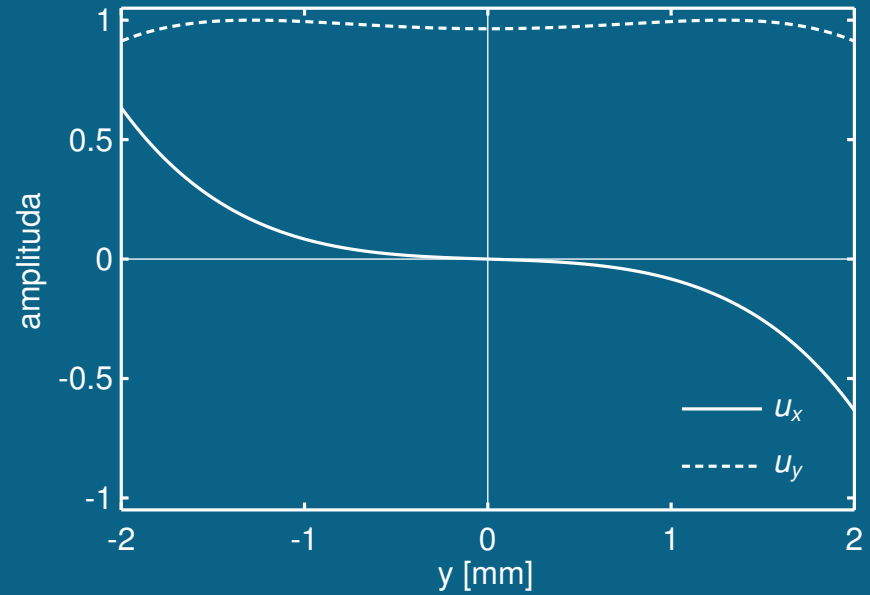
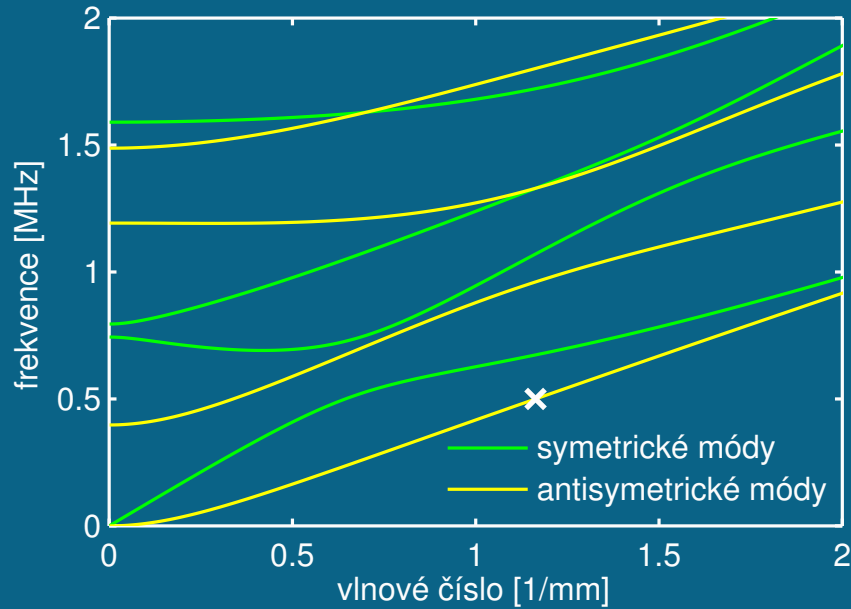
$s_0, u_x$



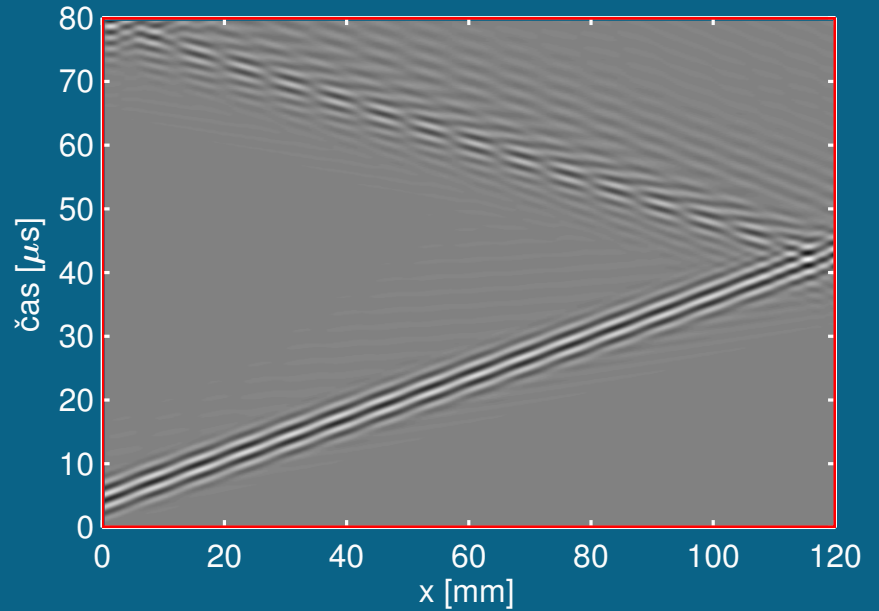
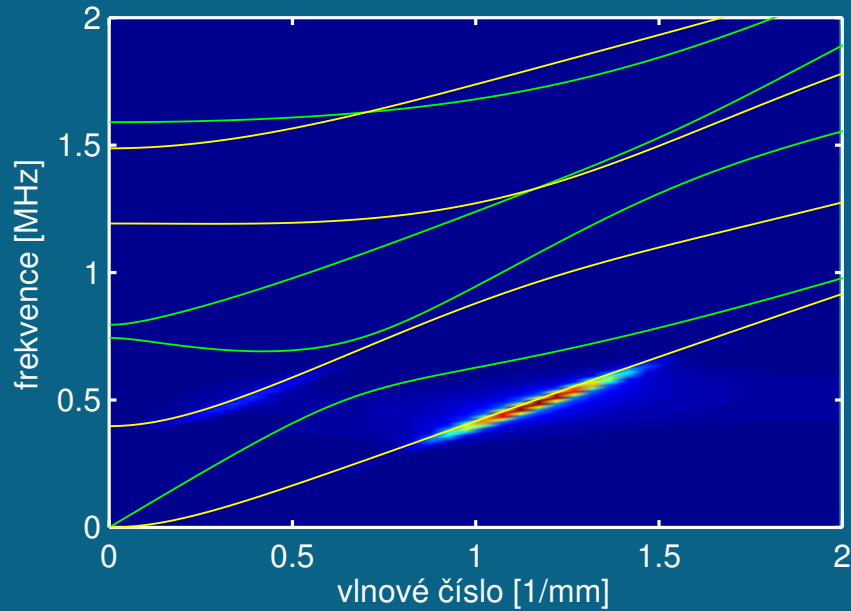
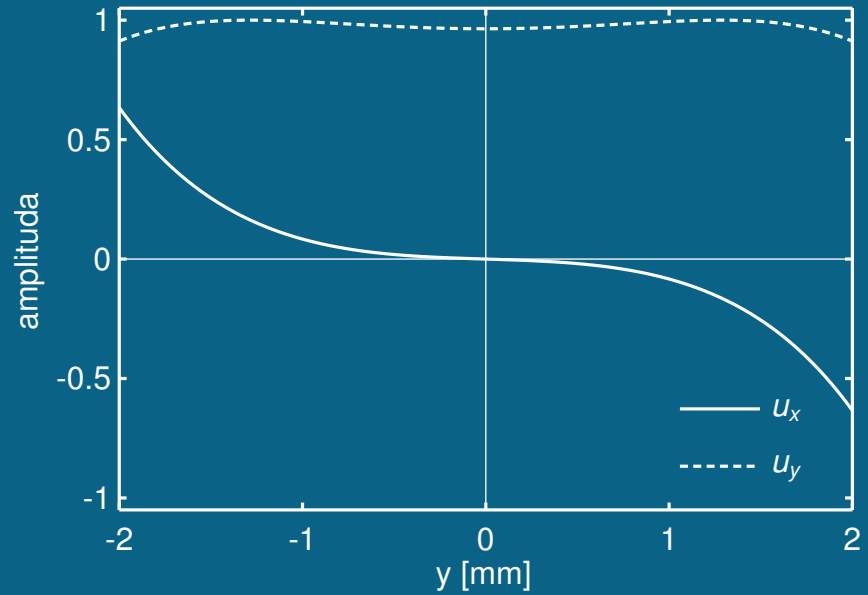
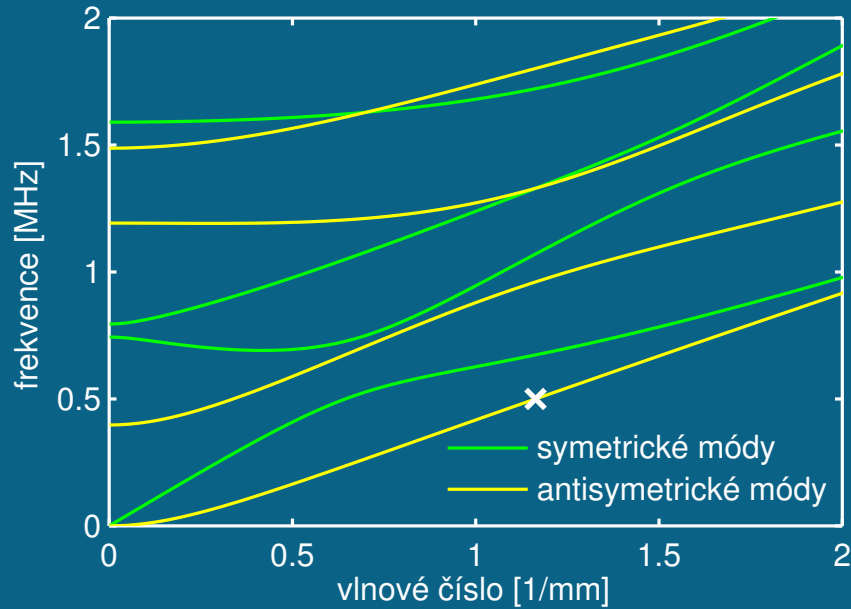
$s_0, u_y$



mód =  $a_0$ ,  $f_0 = 0.5 \text{ MHz}$ ,  $N_c = 5$

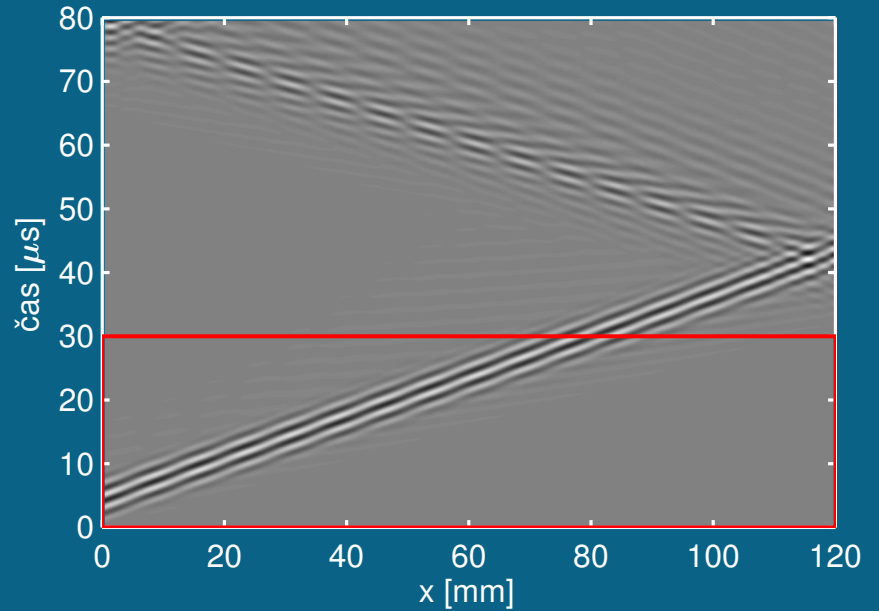
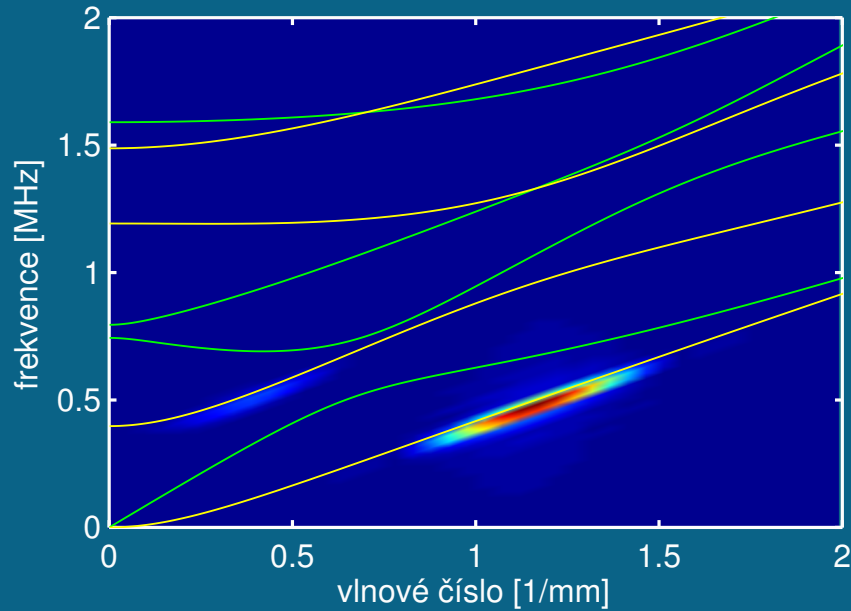
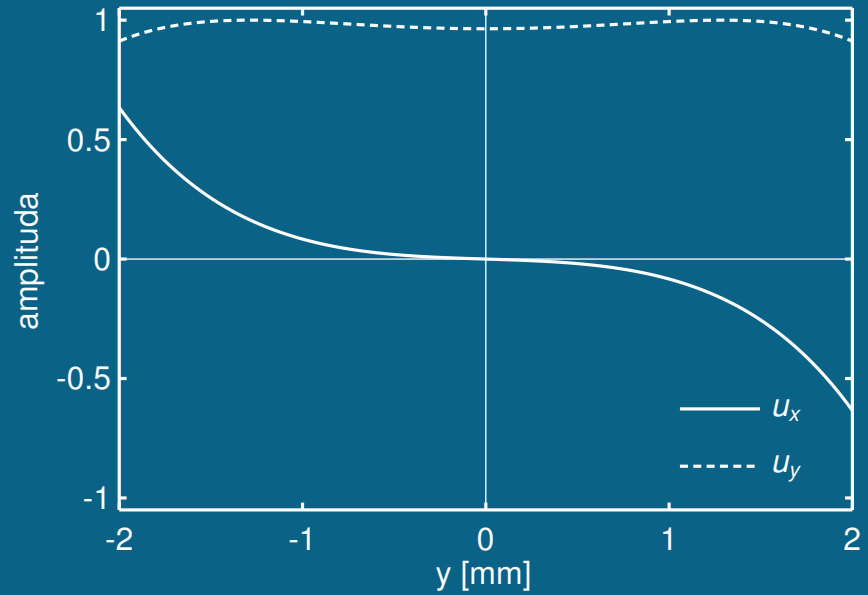
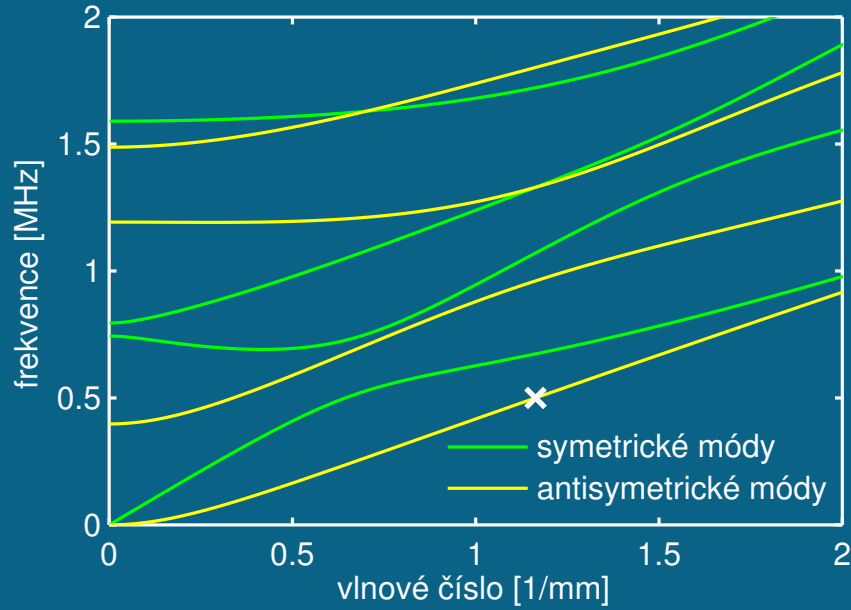


mód =  $a_0$ ,  $f_0 = 0.5 \text{ MHz}$ ,  $N_c = 5$

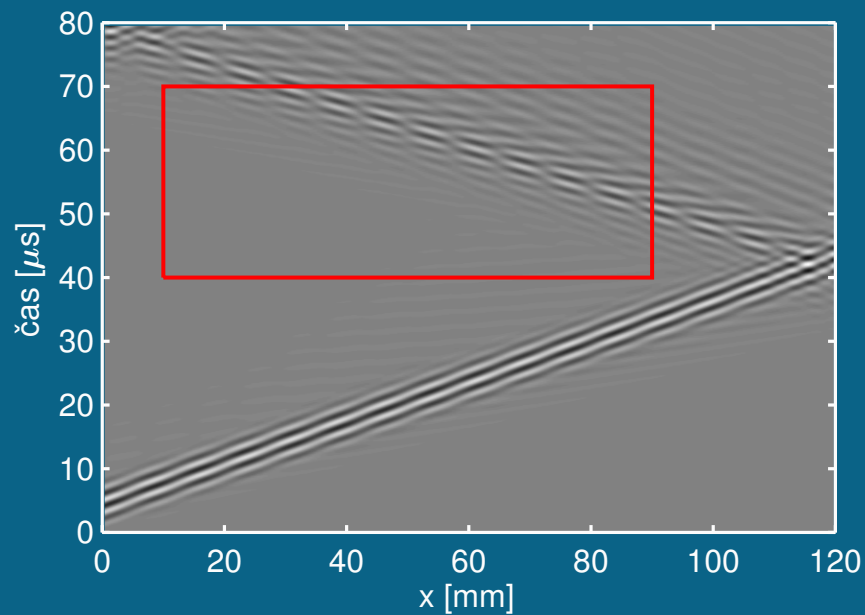
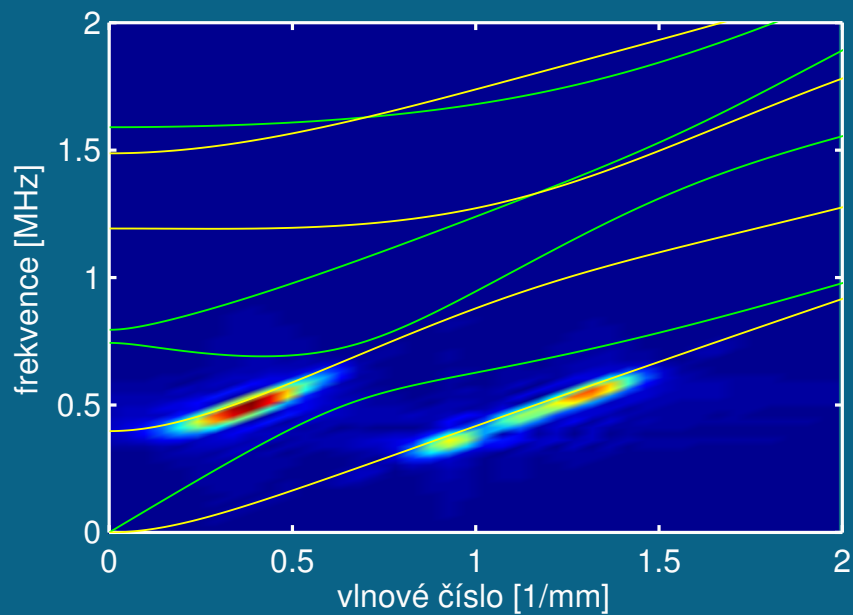
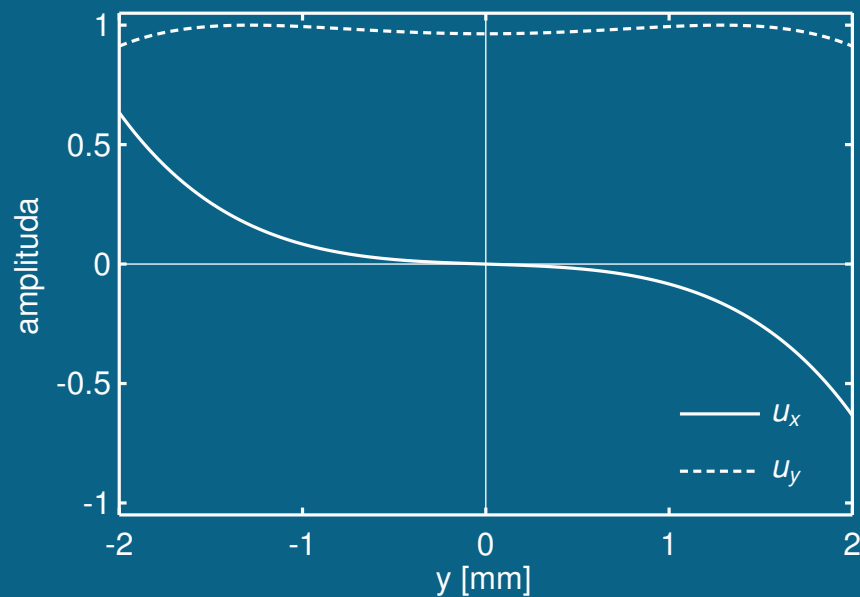
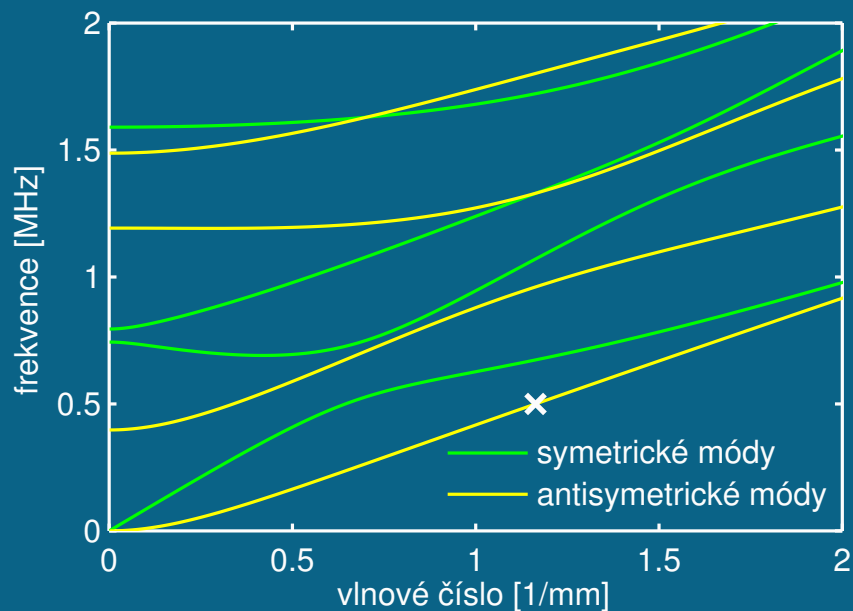




mód =  $a_0$ ,  $f_0 = 0.5$  MHz,  $N_c = 5$



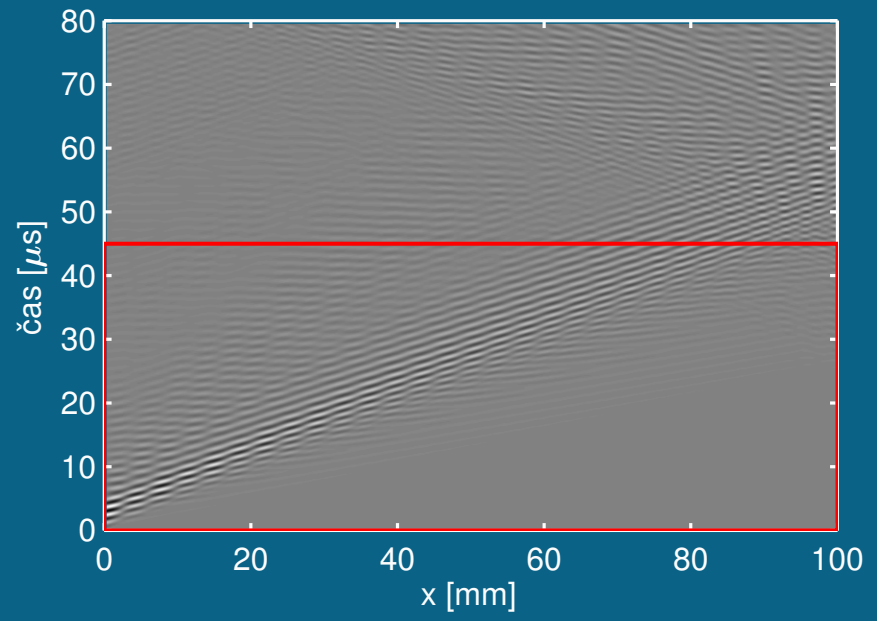
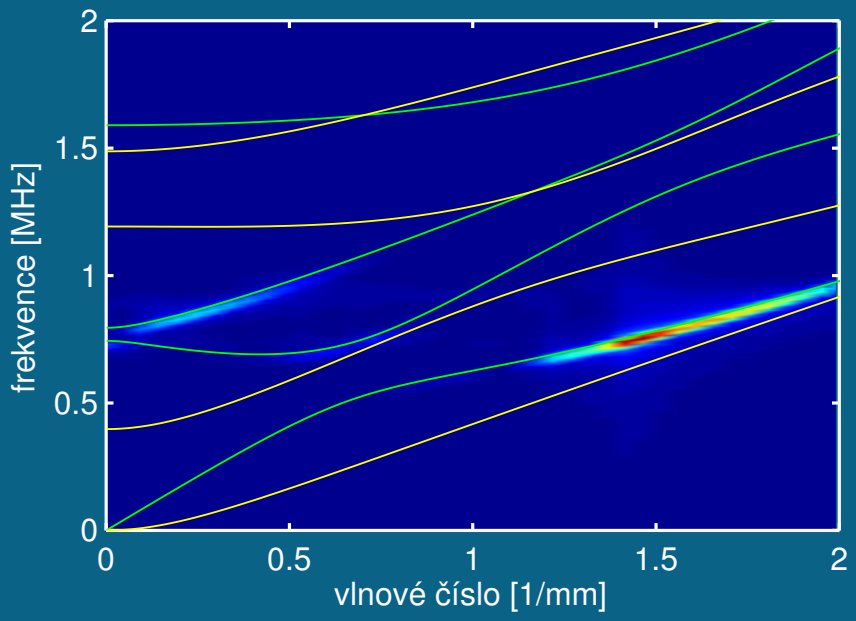
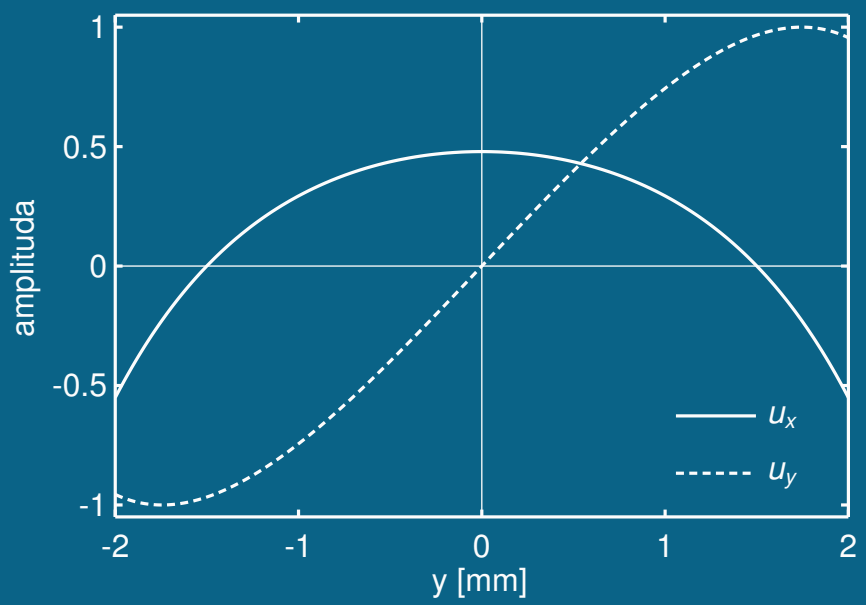
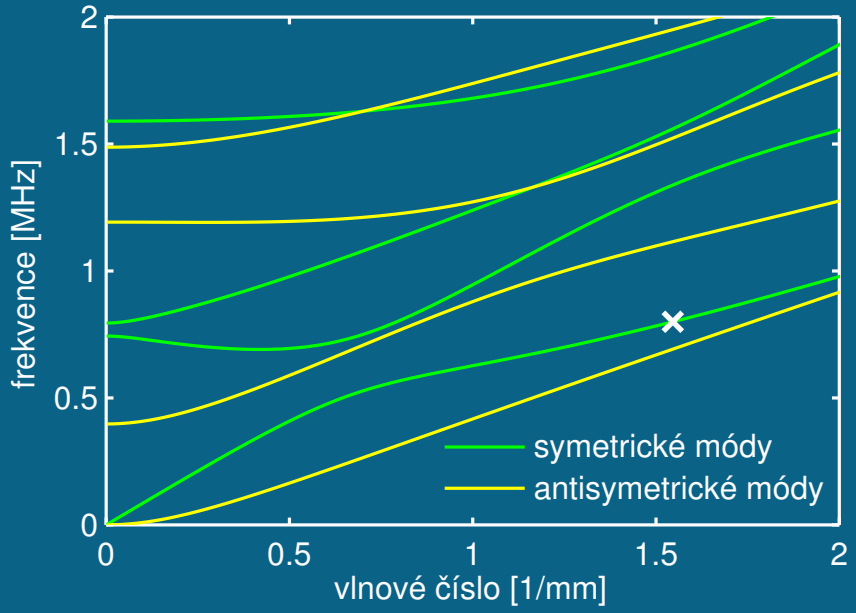
mód =  $a_0$ ,  $f_0 = 0.5 \text{ MHz}$ ,  $N_c = 5$



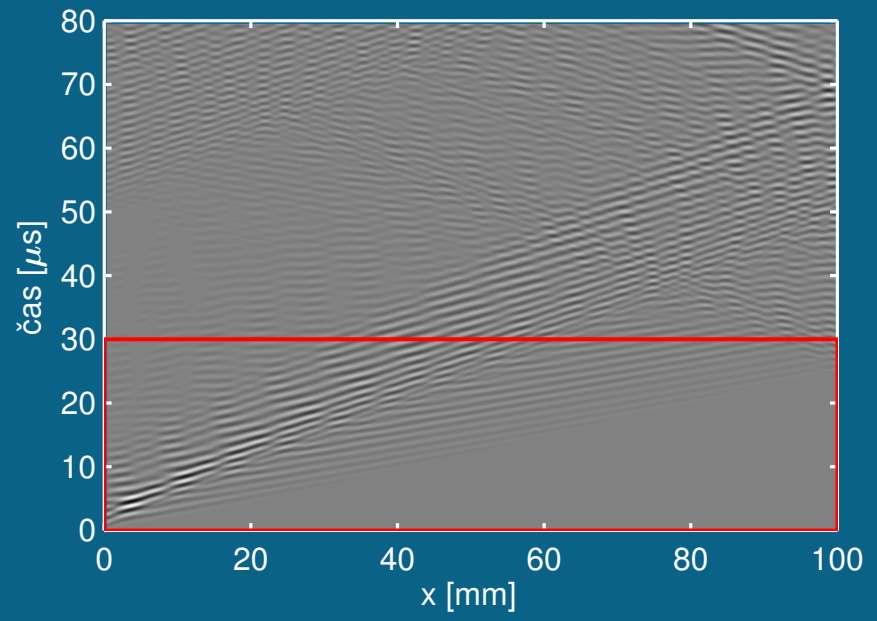
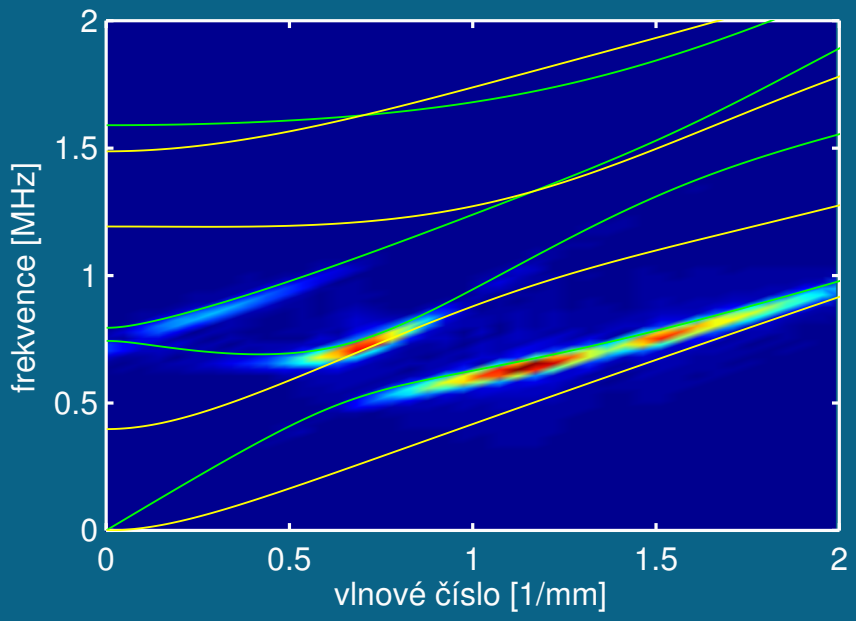
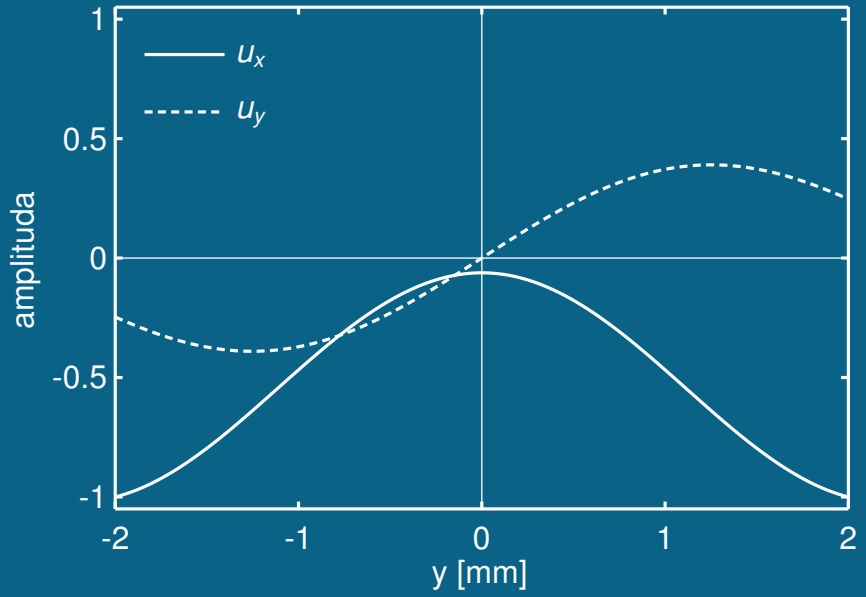
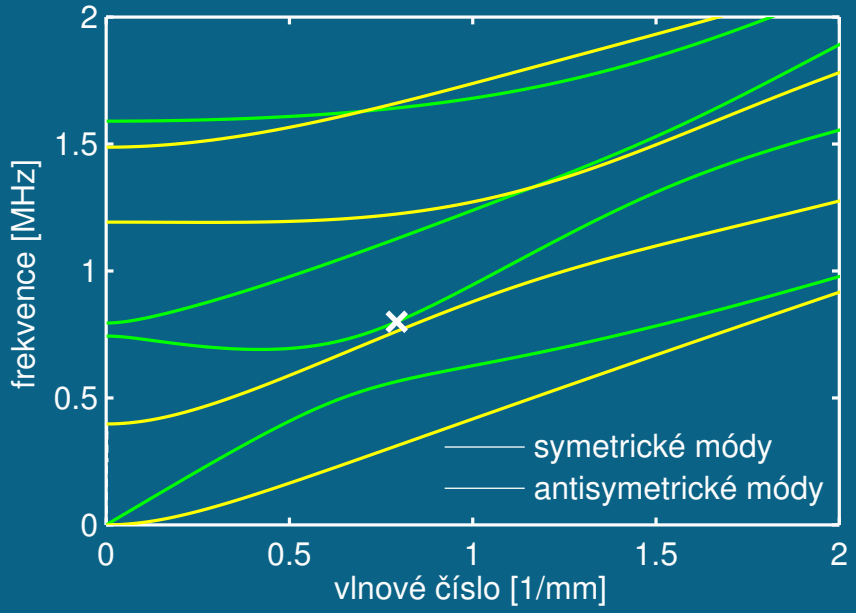
## Porovnání módů

$$s_0 \times s_1$$

mód =  $s_0$ ,  $f_0 = 0.8 \text{ MHz}$ ,  $N_c = 5$

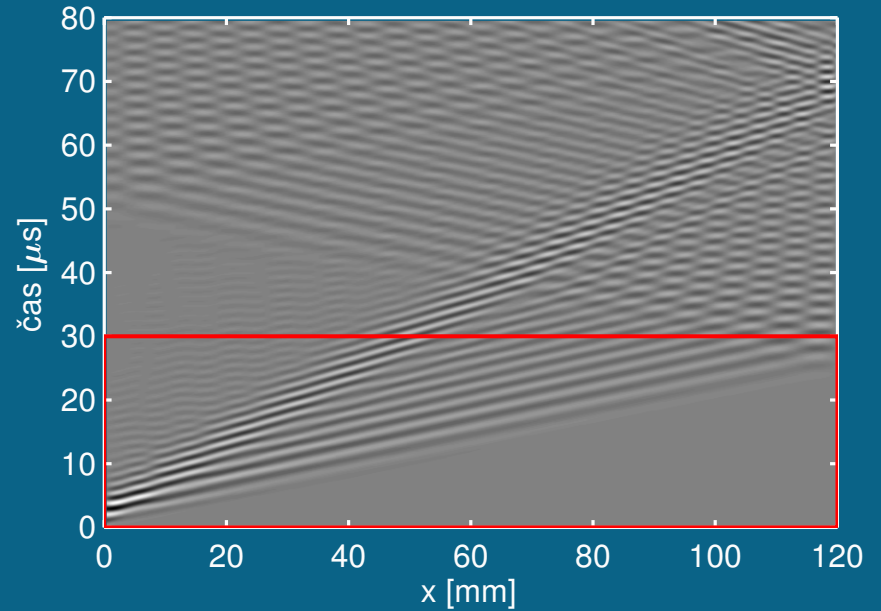
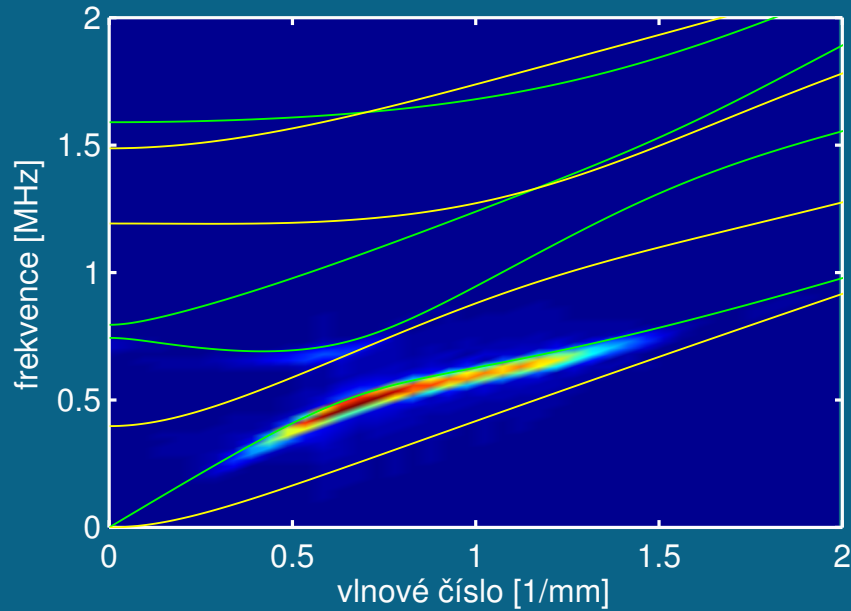
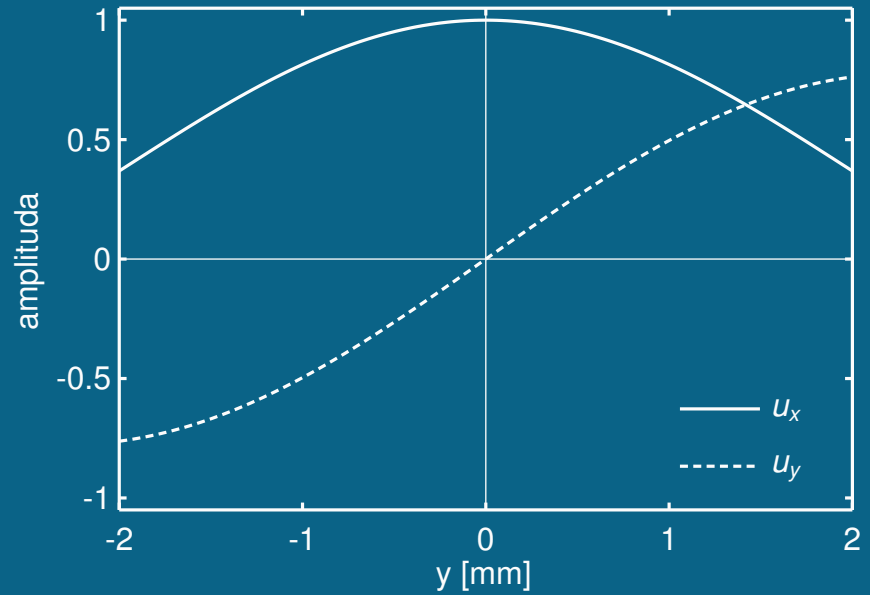
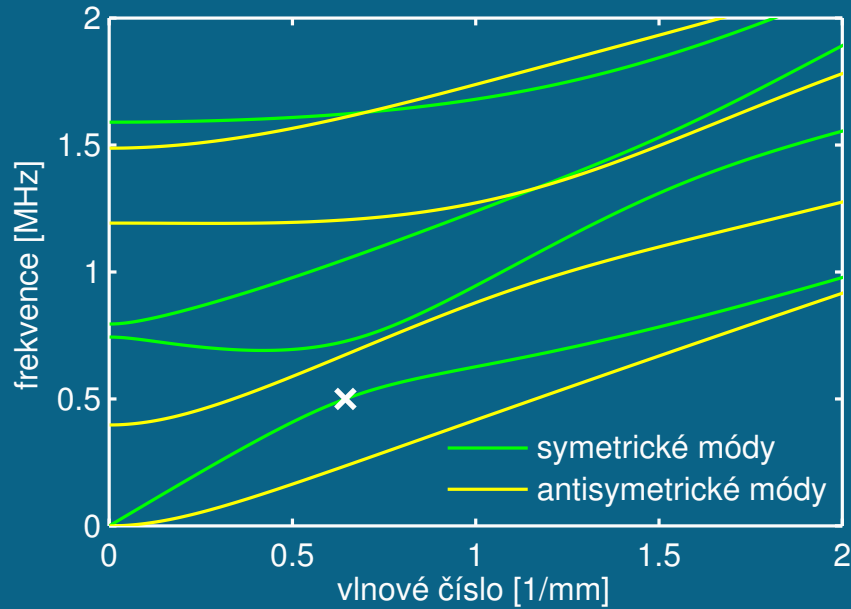


mód =  $s_1$ ,  $f_0 = 0.8 \text{ MHz}$ ,  $N_c = 5$

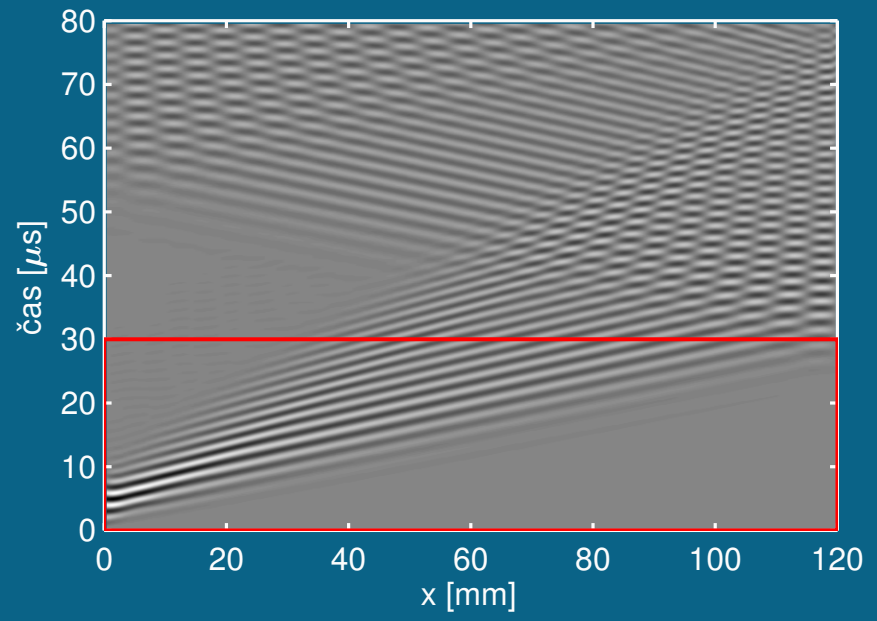
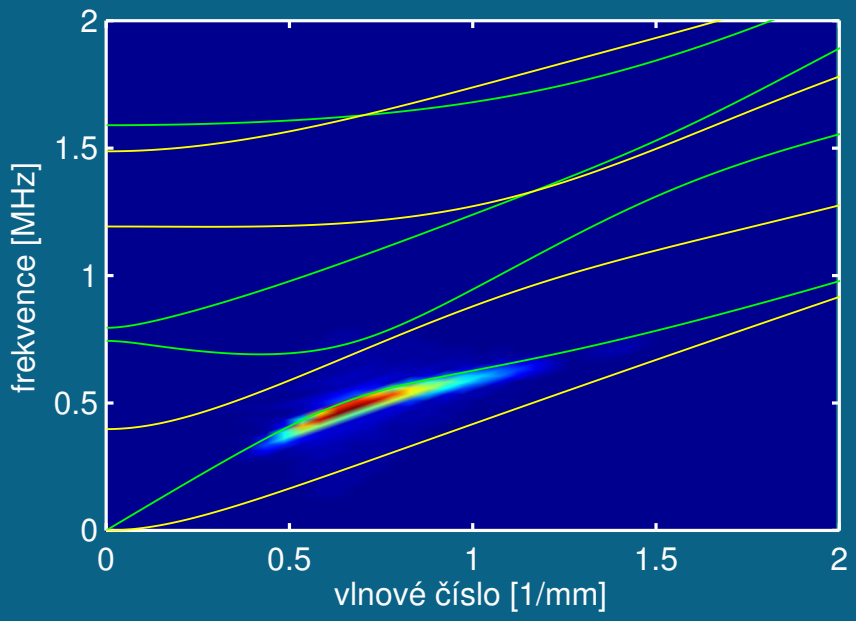
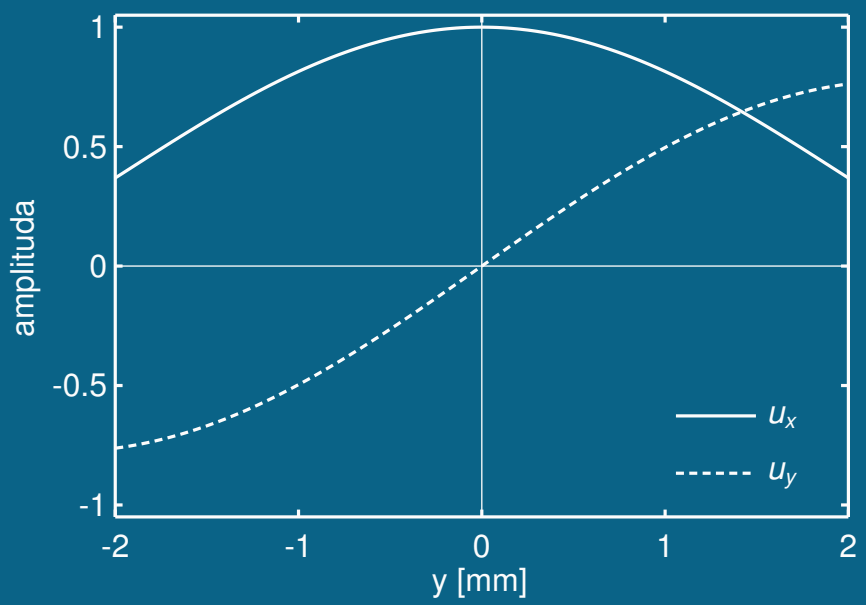
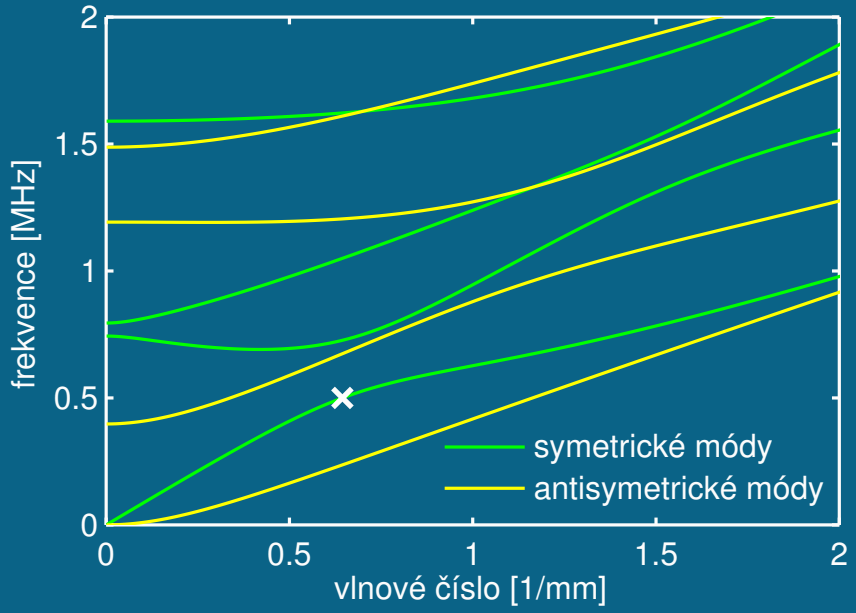


## Vliv šířky pulsu

mód =  $s_0$ ,  $f_0 = 0.5 \text{ MHz}$ ,  $N_c = 3$

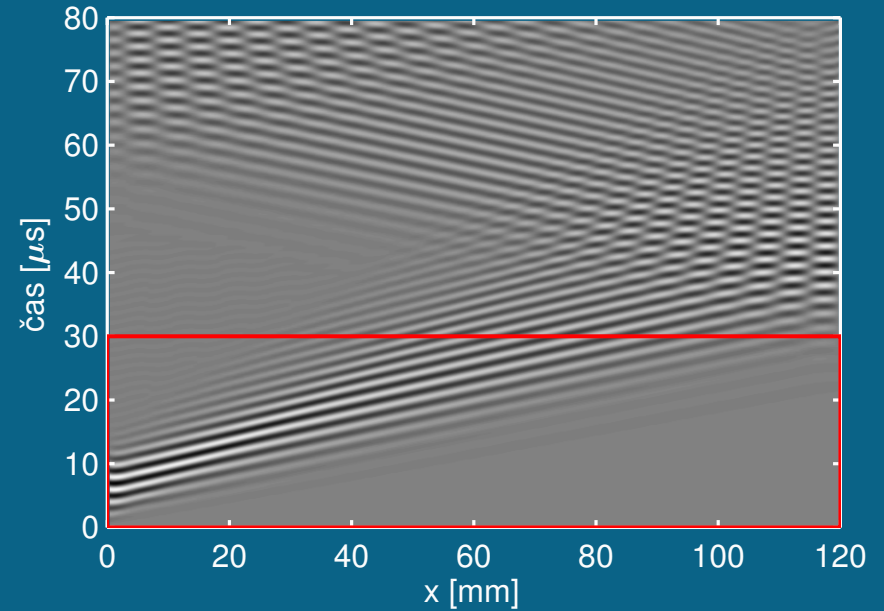
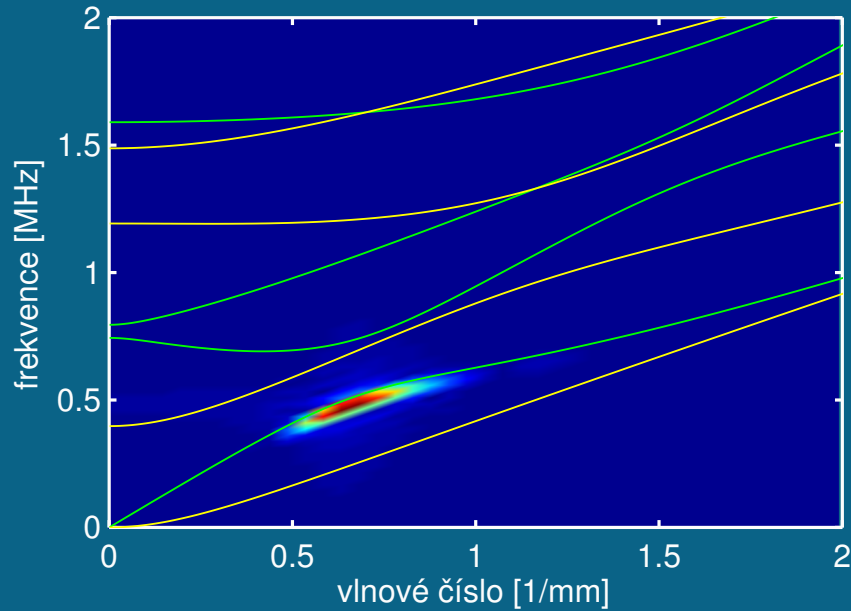
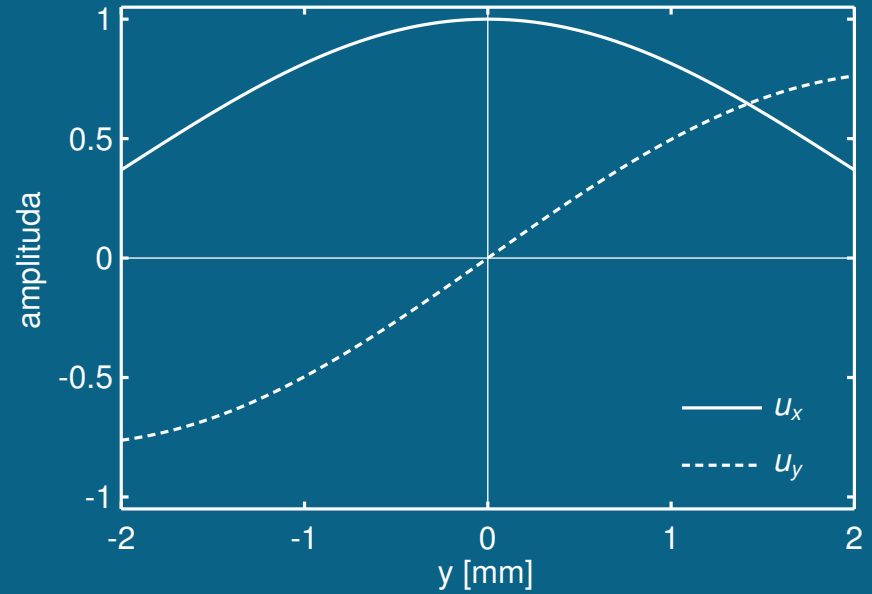
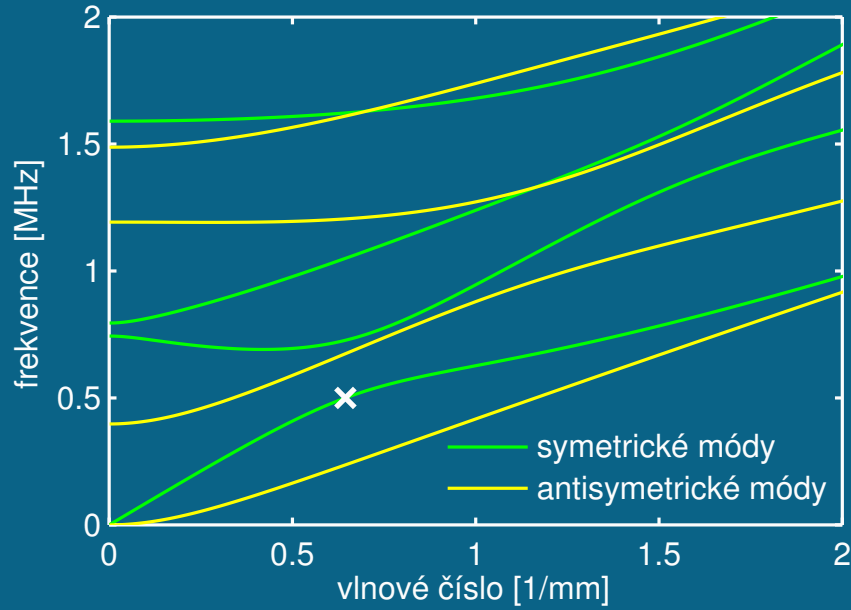


mód =  $s_0$ ,  $f_0 = 0.5$  MHz,  $N_c = 5$





mód =  $s_0$ ,  $f_0 = 0.5$  MHz,  $N_c = 7$



## Vybuzení čisté Lambovy vlny

- frekvence budícího signálu musí být stejná jako frekvence Lambovy vlny,
- prostorové rozložení buzení ( $\Phi(y) = [u_x, u_y]^T$ ) musí přesně odpovídat tvaru Lambovy vlny.

Jediný frekvenční vstup:

$$f(y, t) = \Phi(y) e^{i\omega t}$$

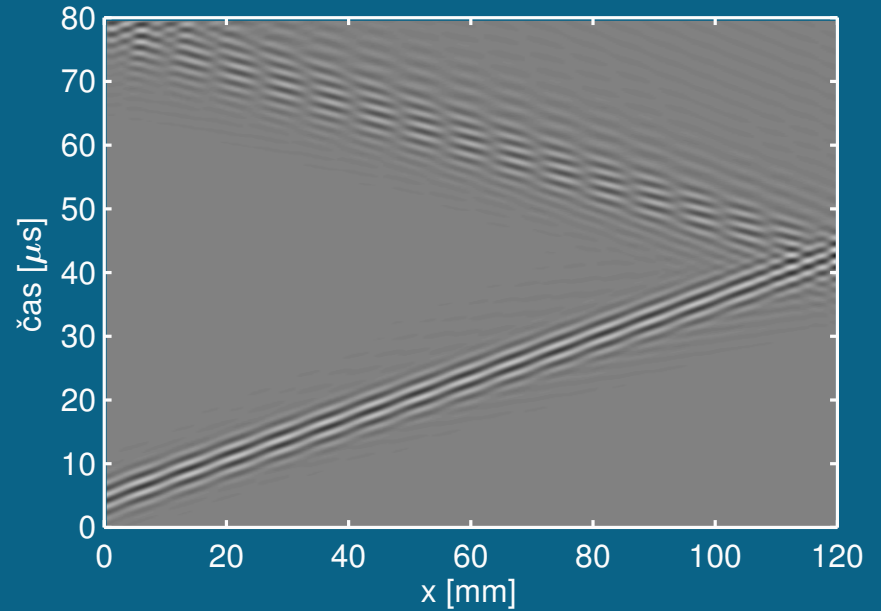
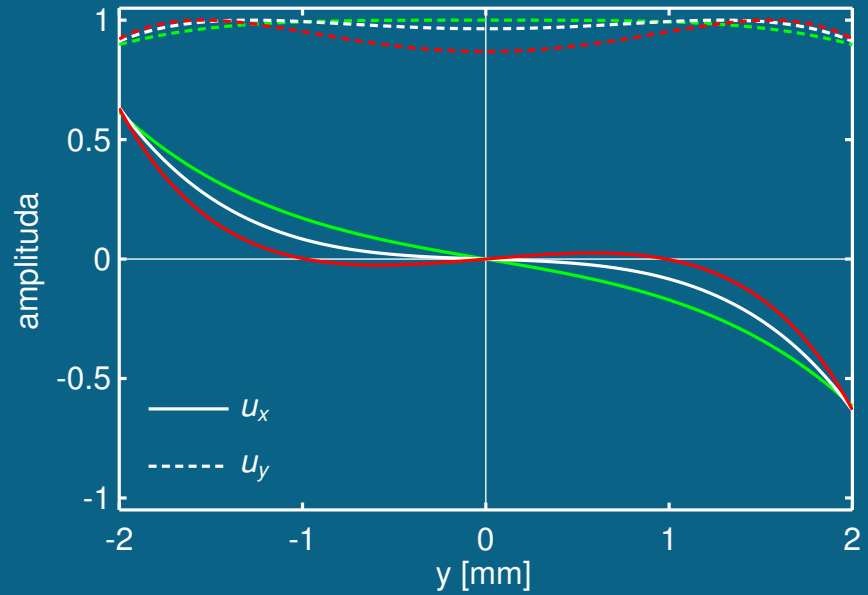
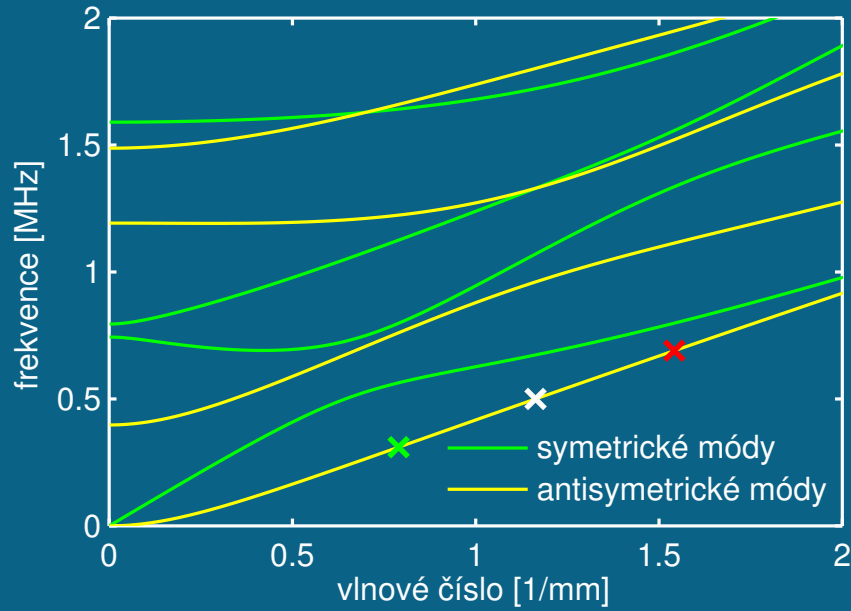
Širokopásmový frekvenční vstup:

$$f(y, t) = \sum_{j=1}^k \Phi_j(y) A(\omega_j) e^{i\omega_j t}$$

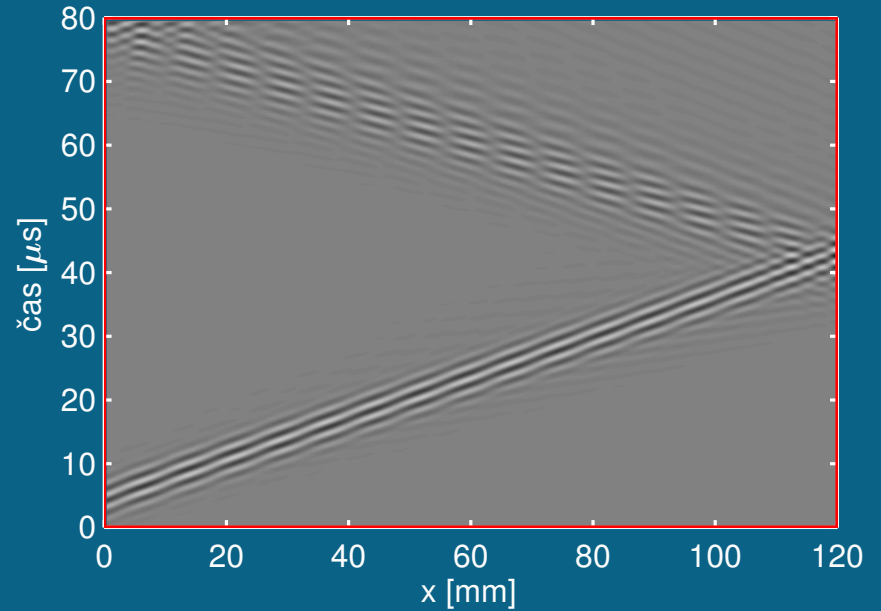
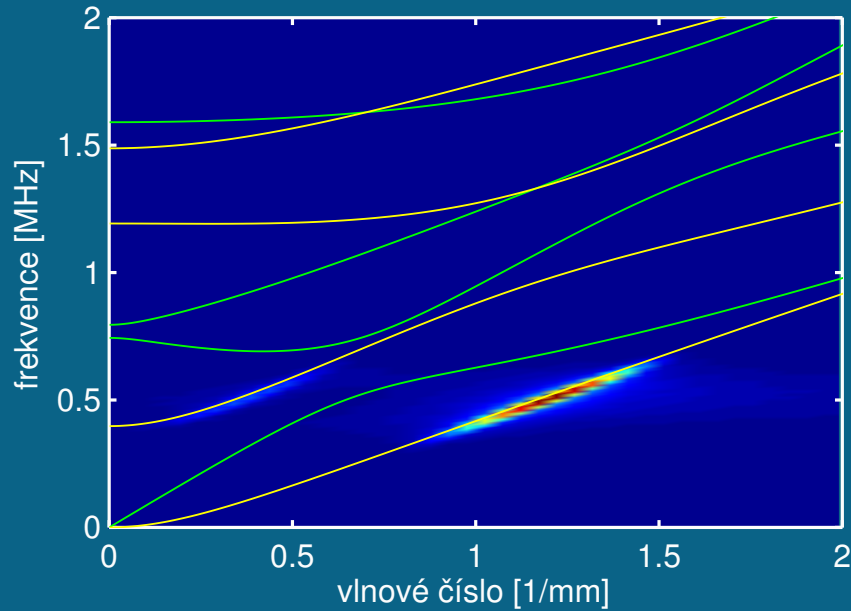
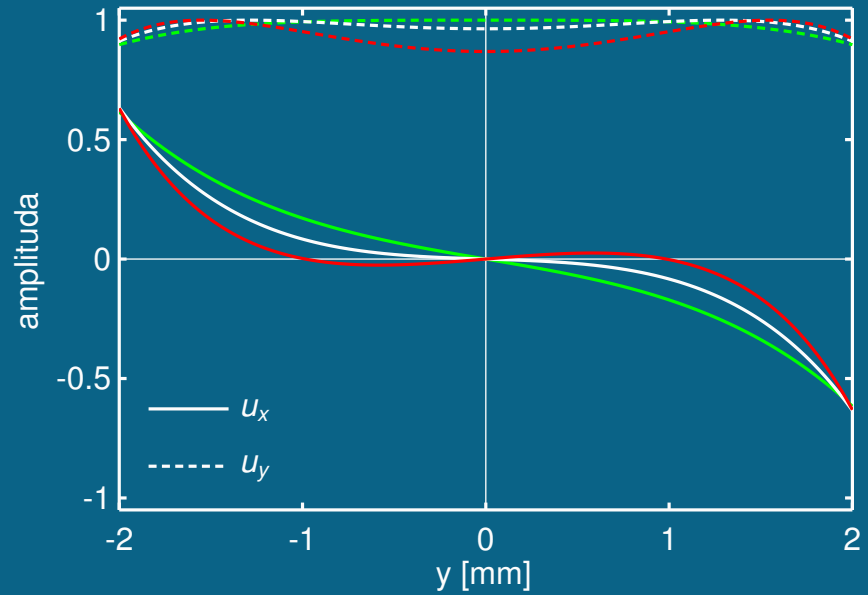
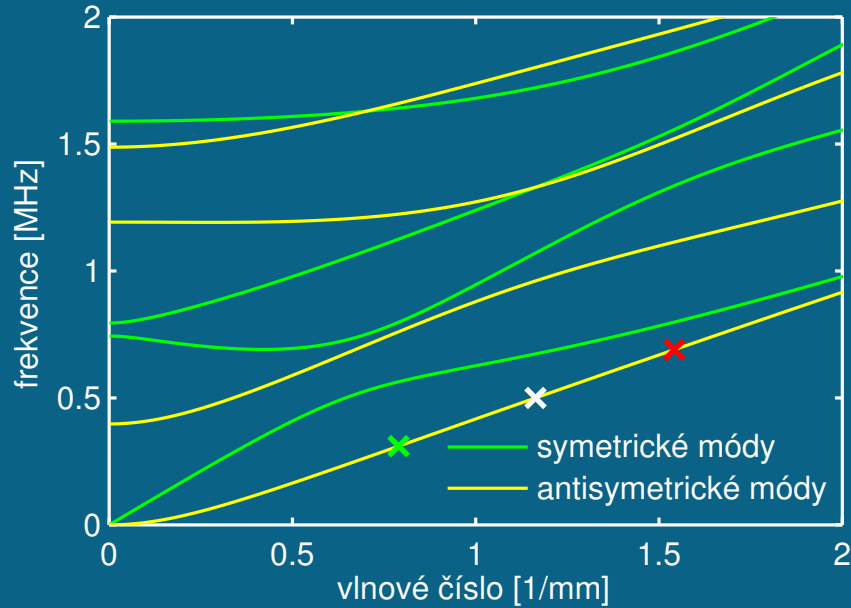
kde

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

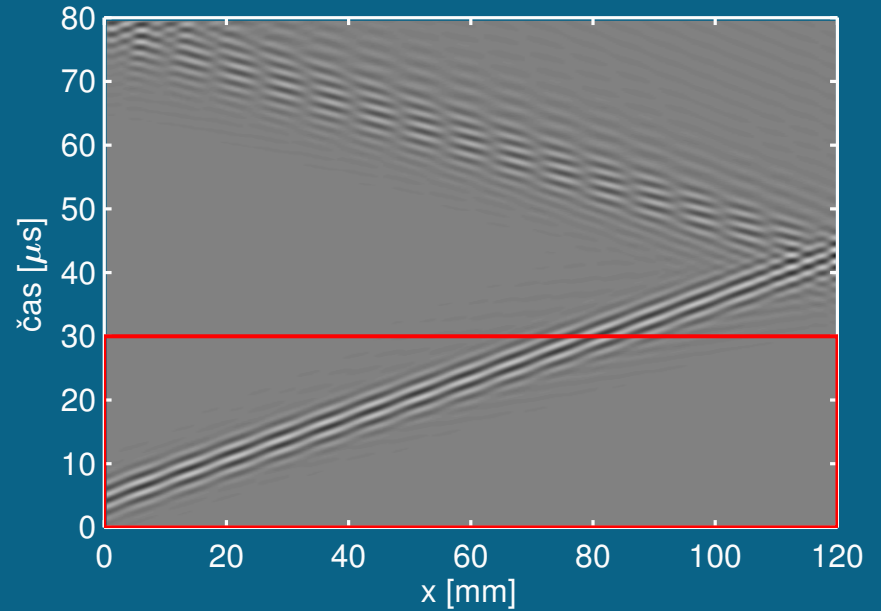
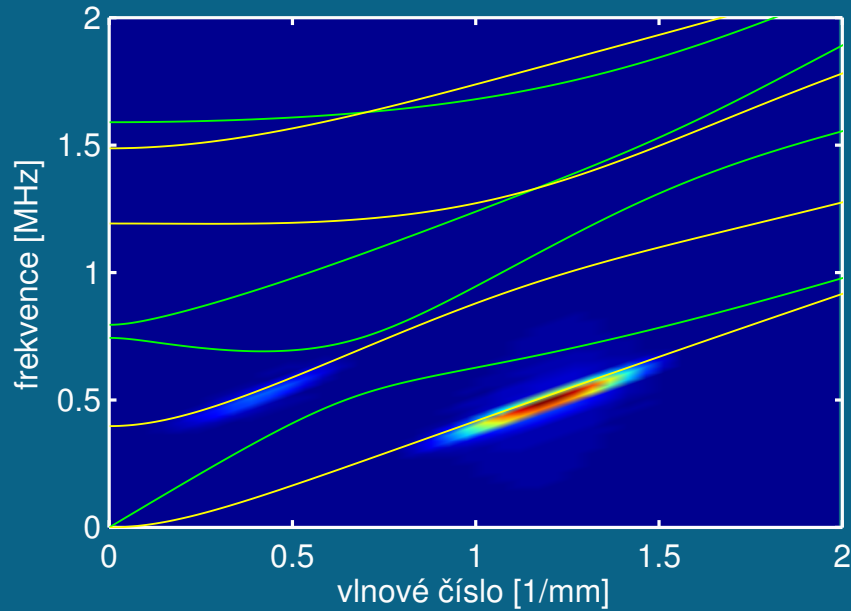
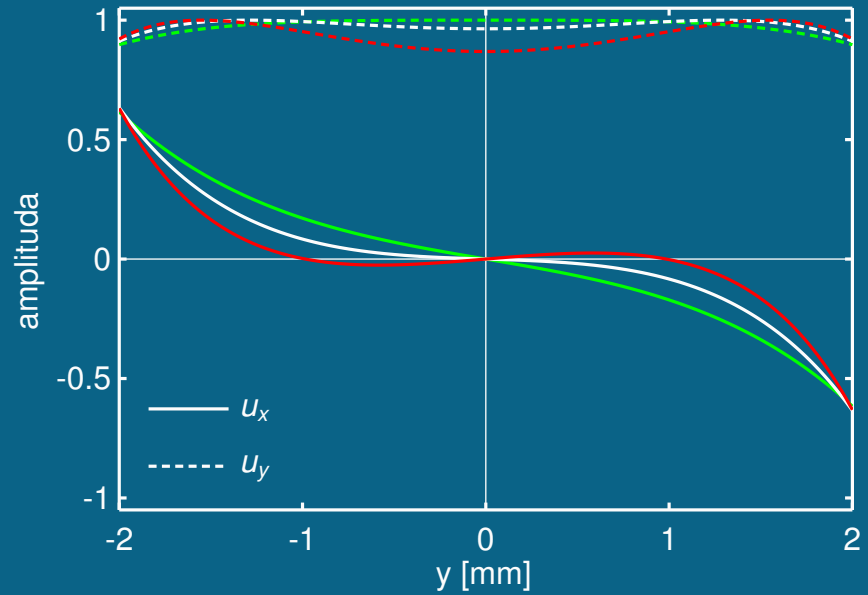
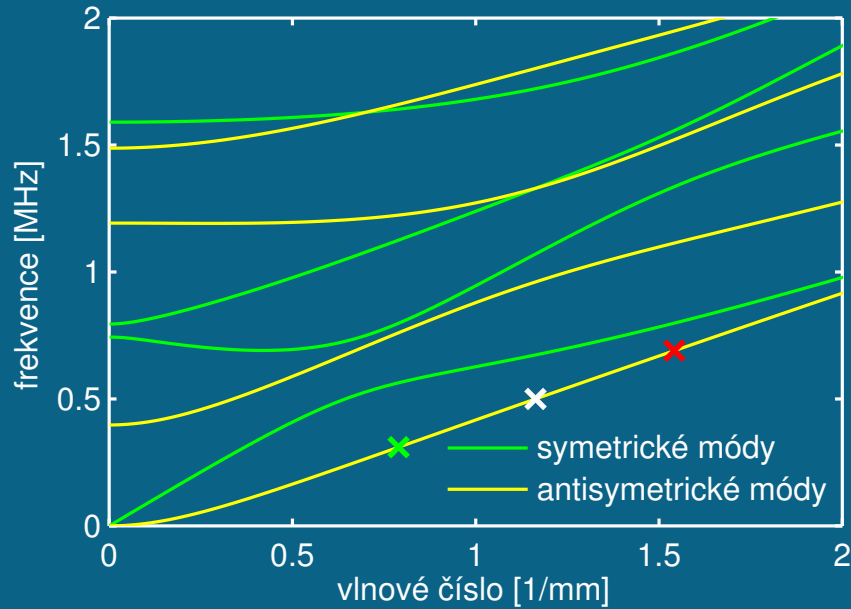
mód =  $a_0$ ,  $f_0 = 0.5 \text{ MHz}$ ,  $N_c = 5$



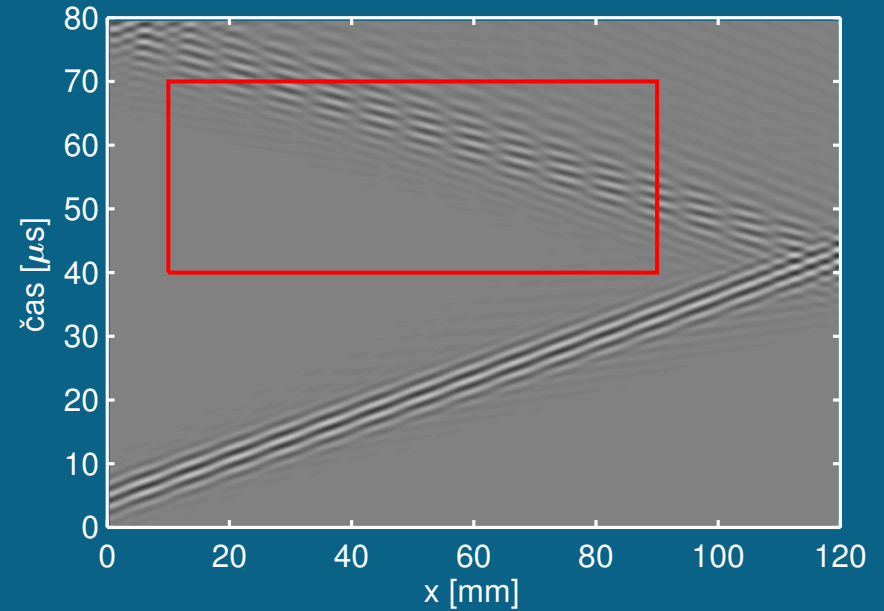
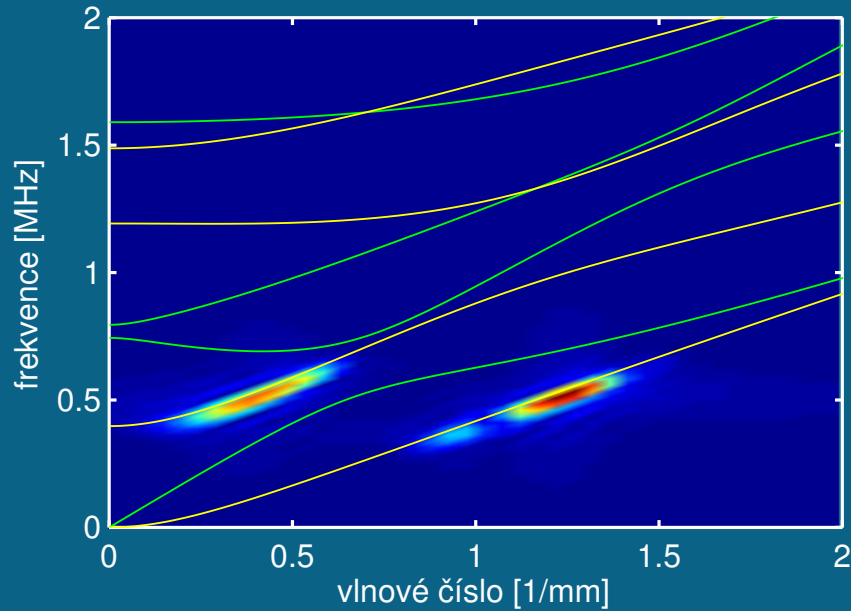
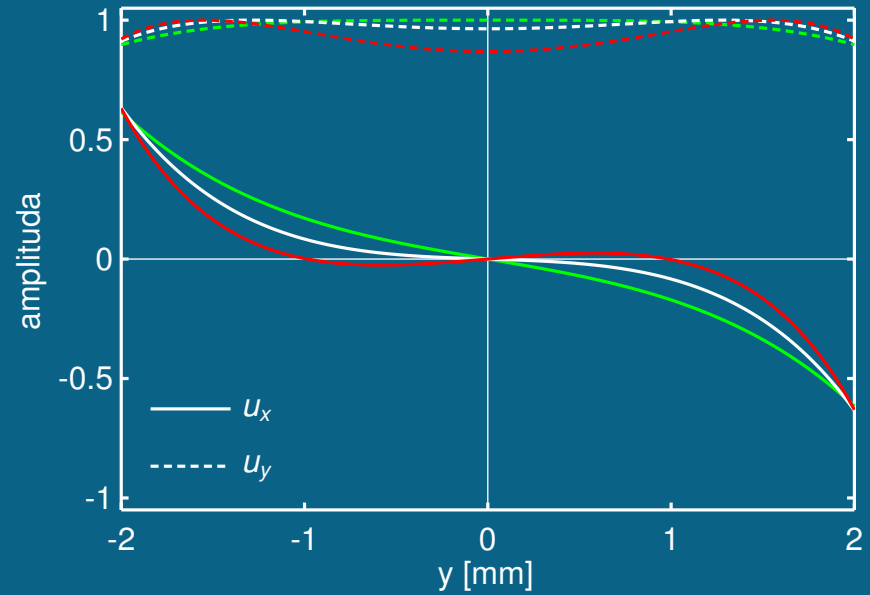
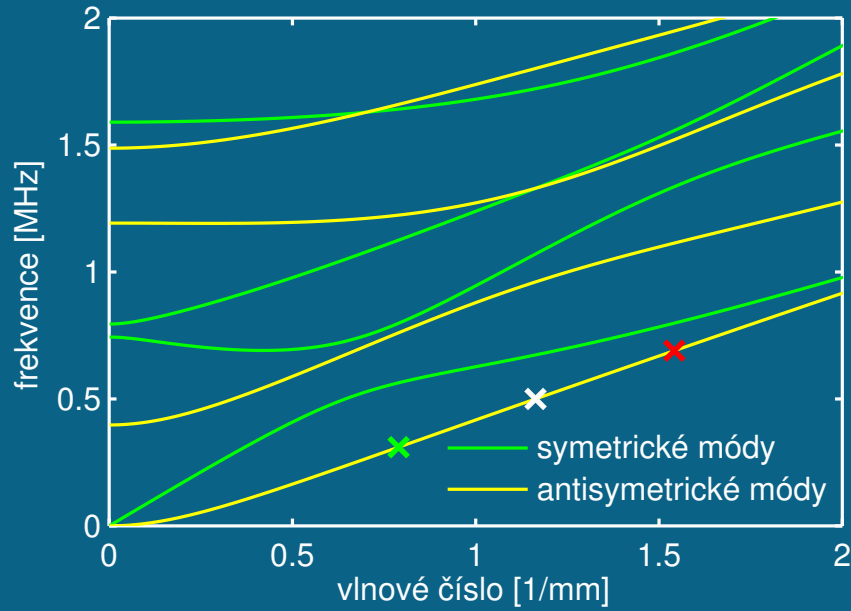
mód =  $a_0$ ,  $f_0 = 0.5$  MHz,  $N_c = 5$



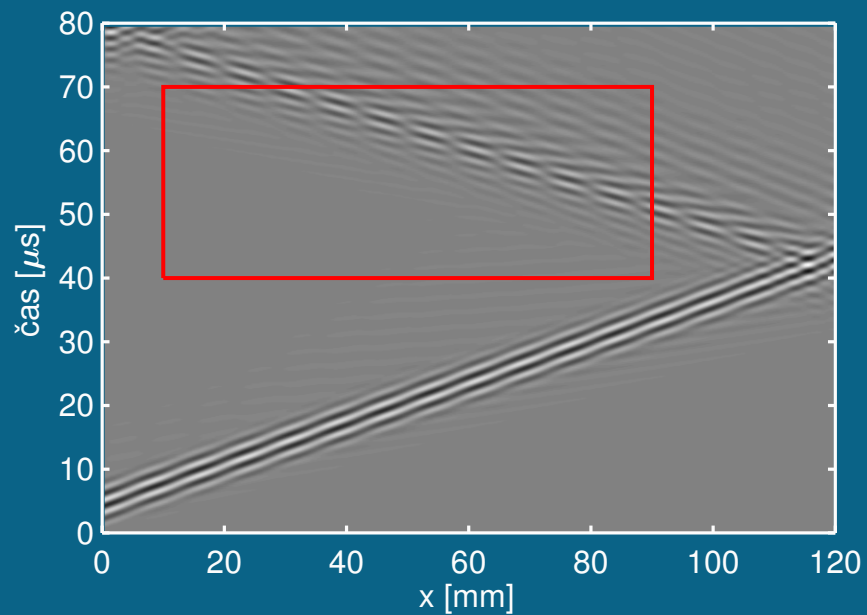
mód =  $a_0$ ,  $f_0 = 0.5 \text{ MHz}$ ,  $N_c = 5$



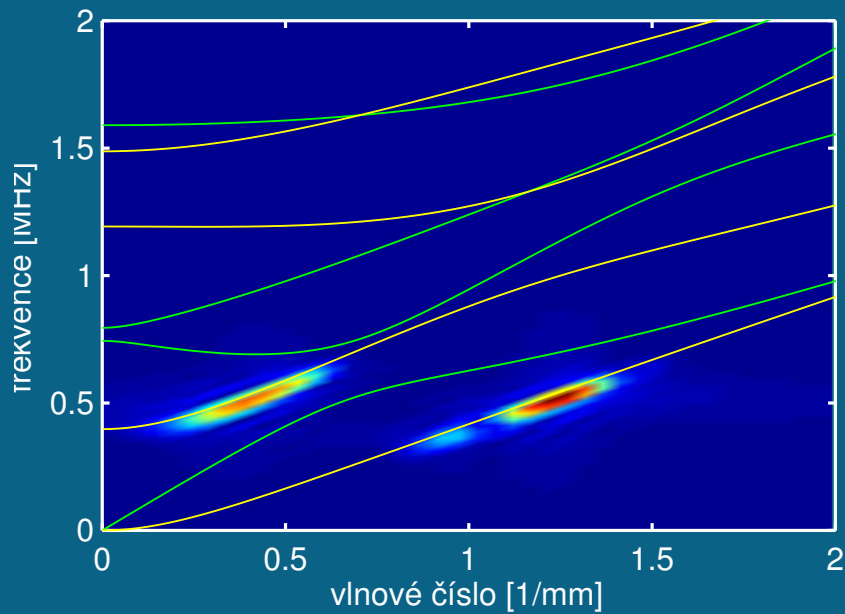
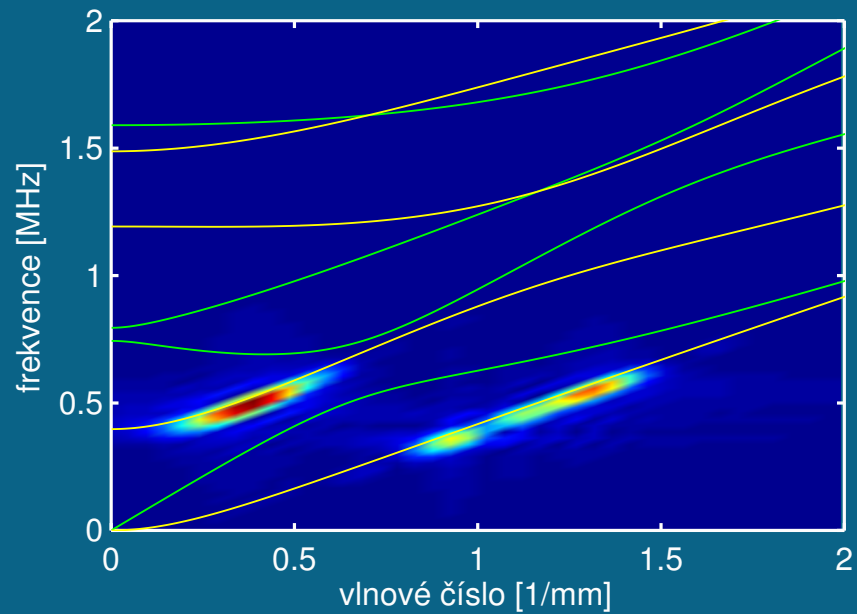
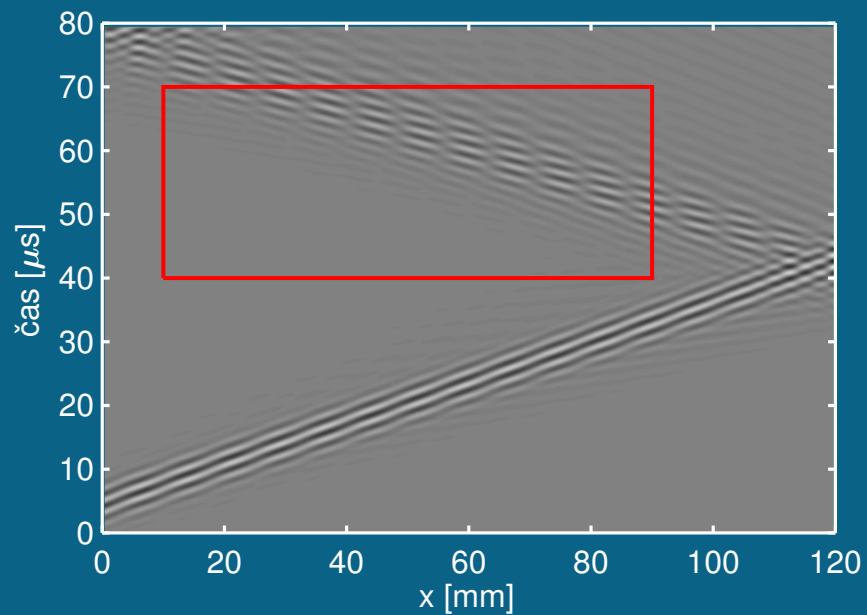
mód =  $a_0$ ,  $f_0 = 0.5 \text{ MHz}$ ,  $N_c = 5$



## Zjednodušeně

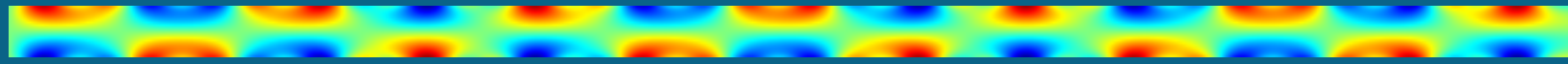


## Přesně



# Disperzní křivky pomocí 1D-FFT

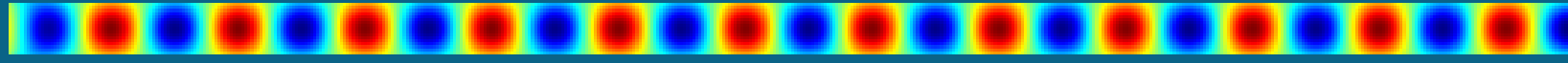
$a_0, u_x$



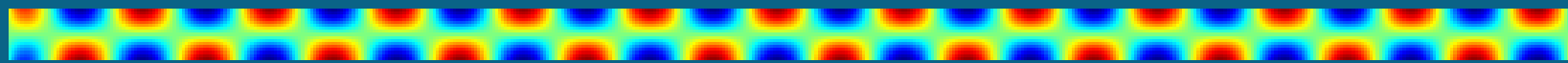
$a_0, u_y$



$s_0, u_x$

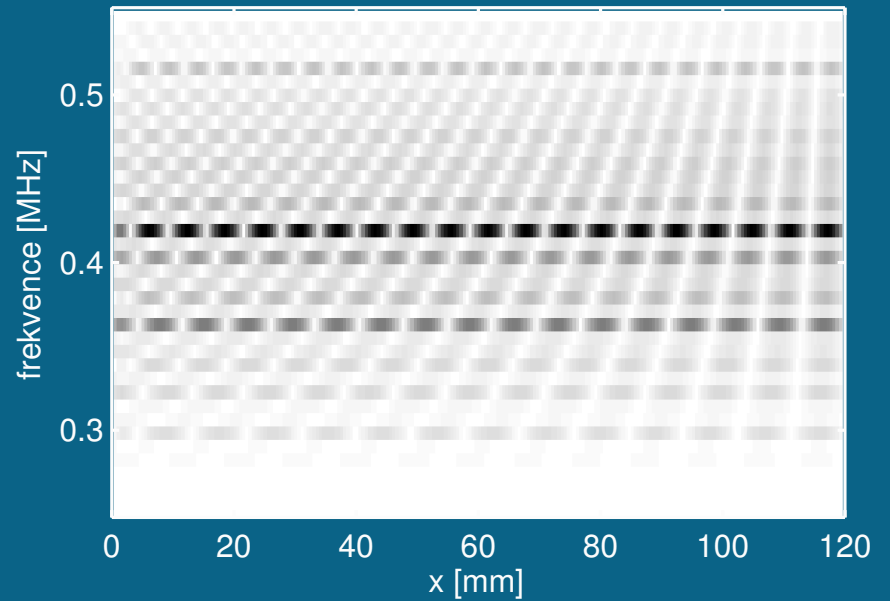
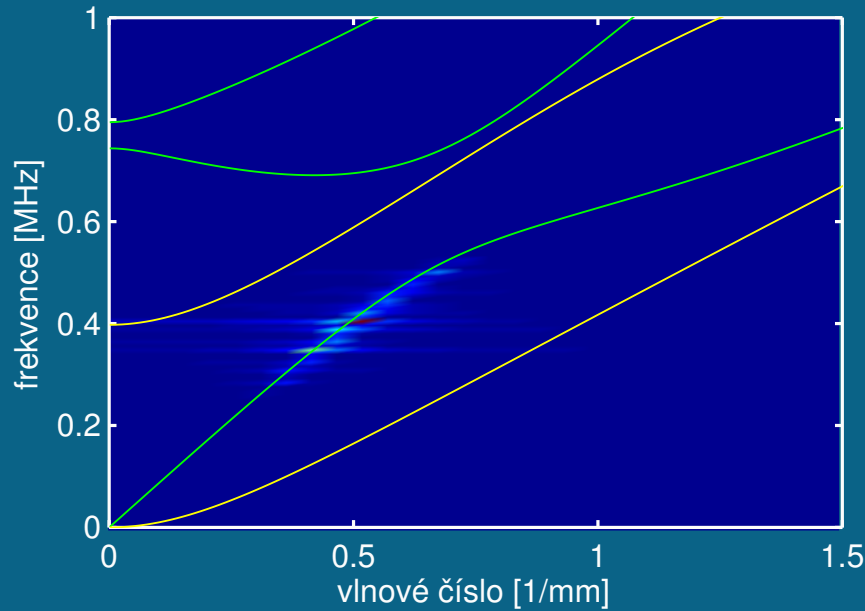
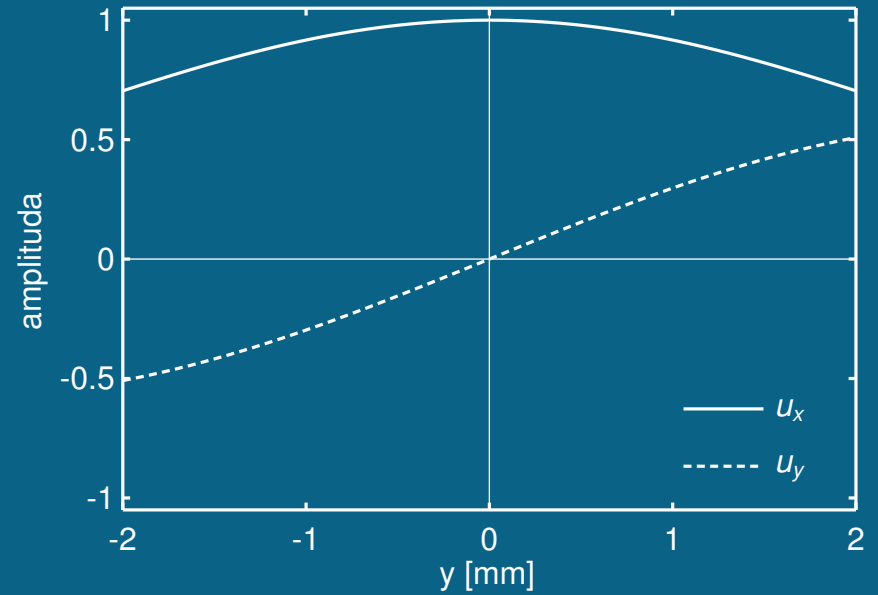
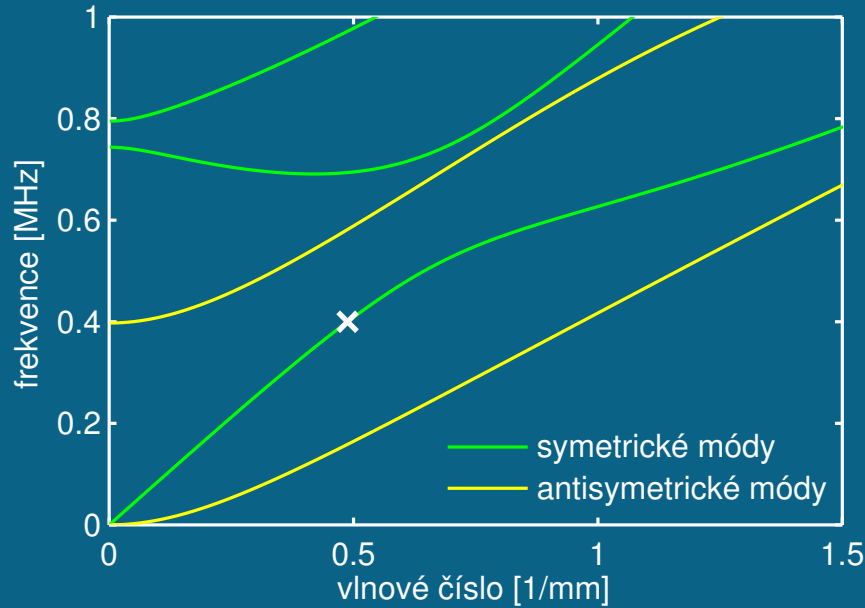


$s_0, u_y$

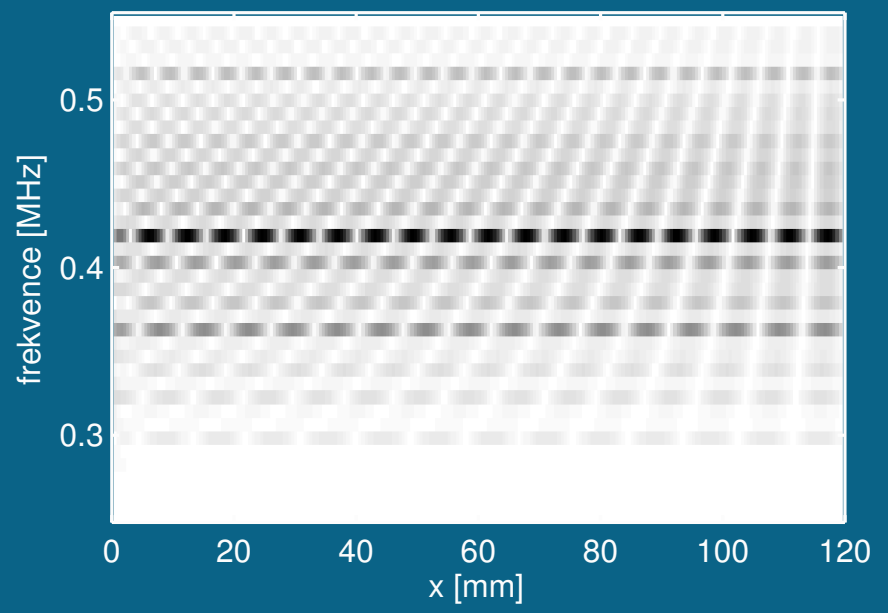
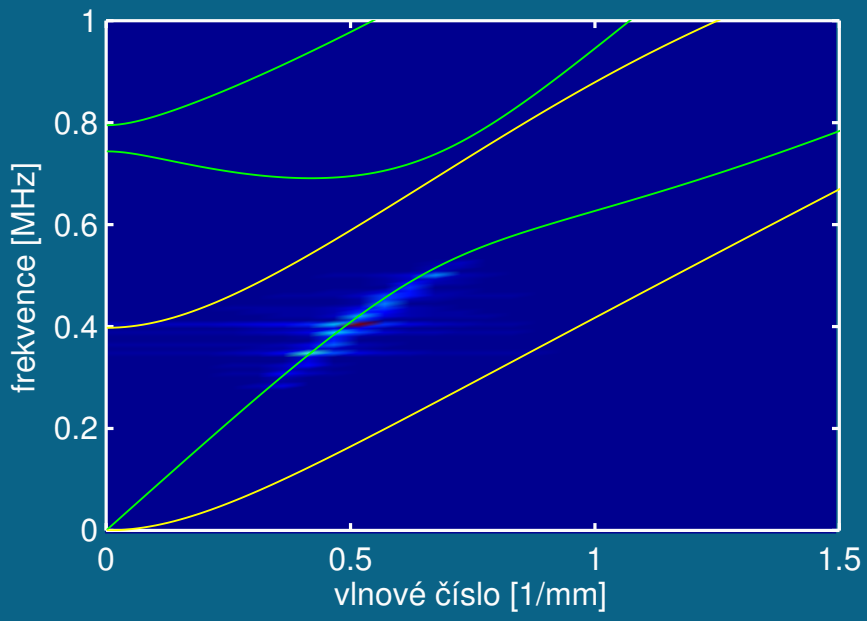
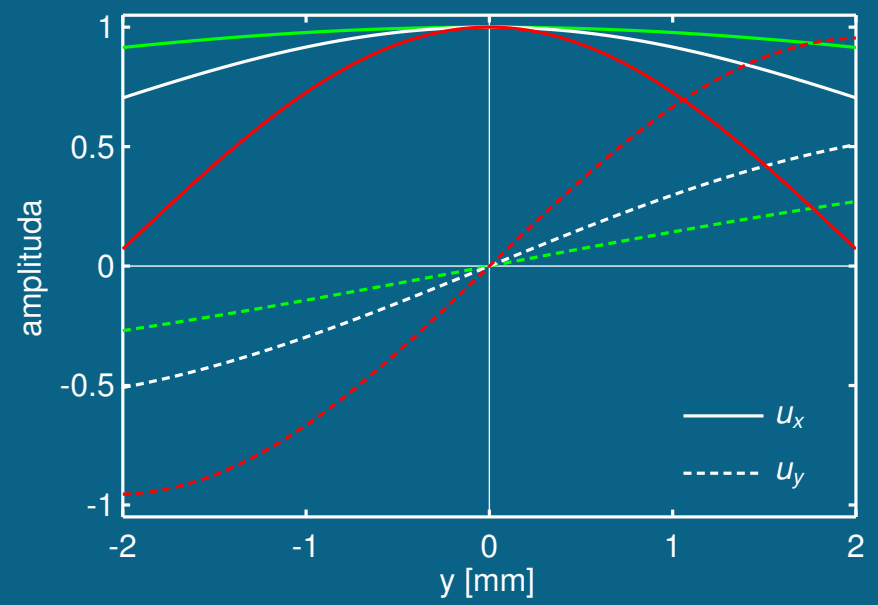
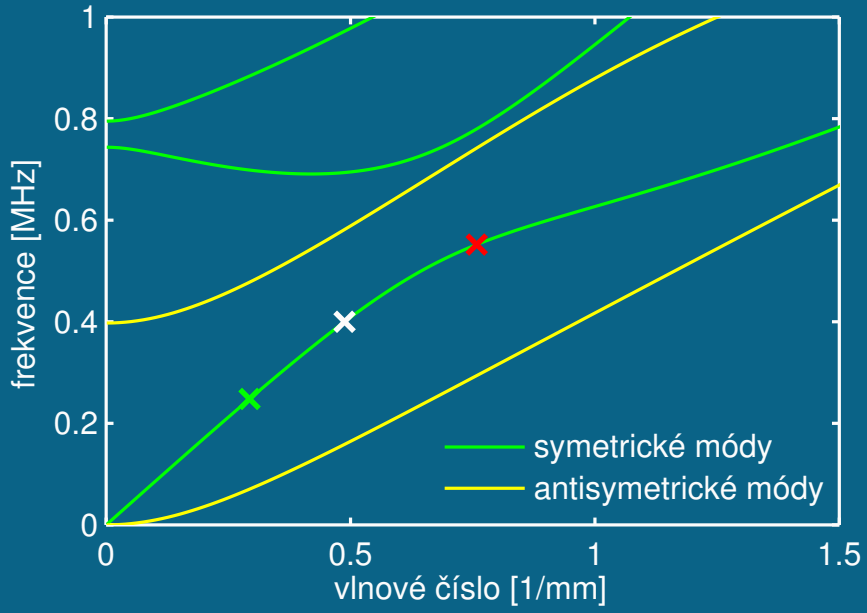




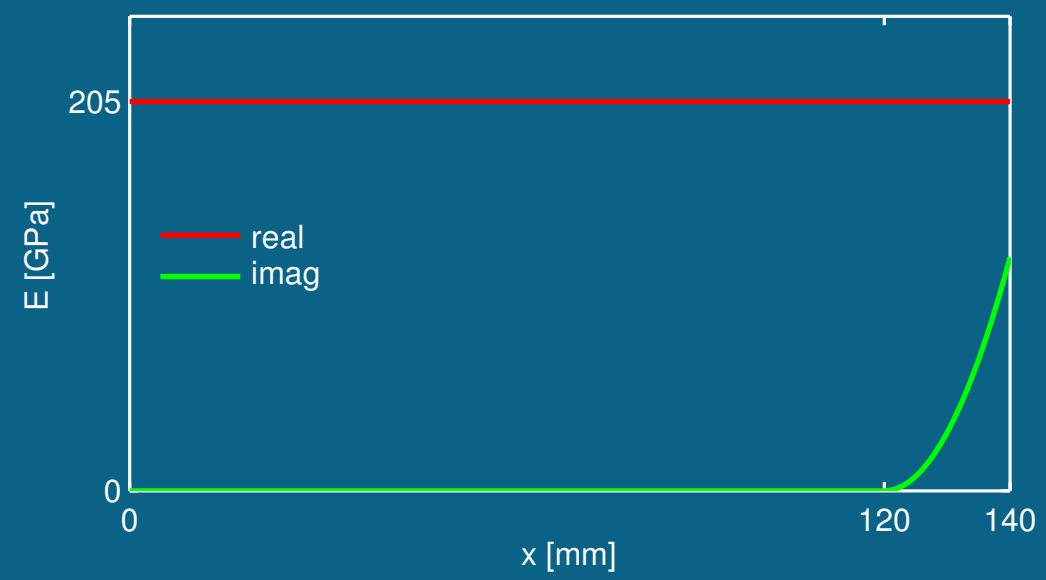
mód =  $s_0$ ,  $f_0 = 0.4 \text{ MHz}$ ,  $N_c = 5$



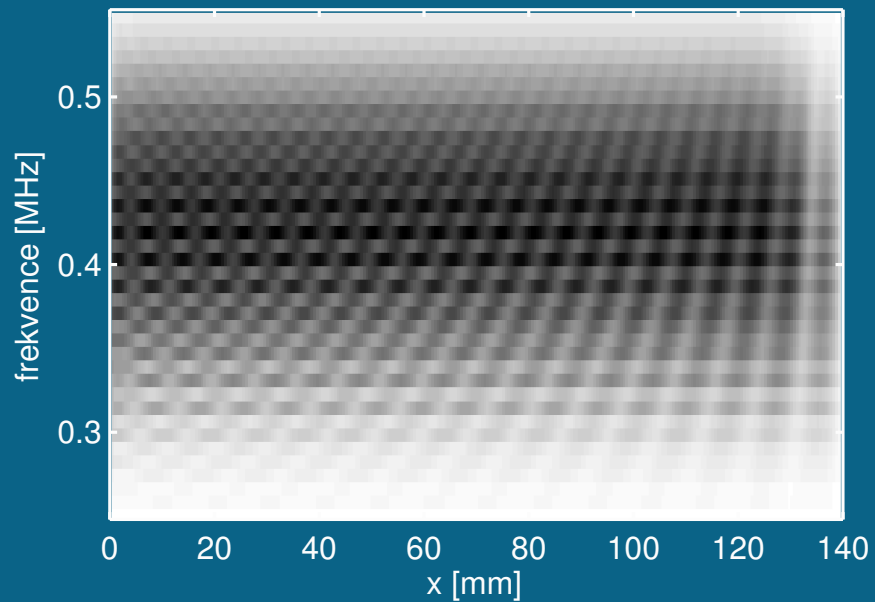
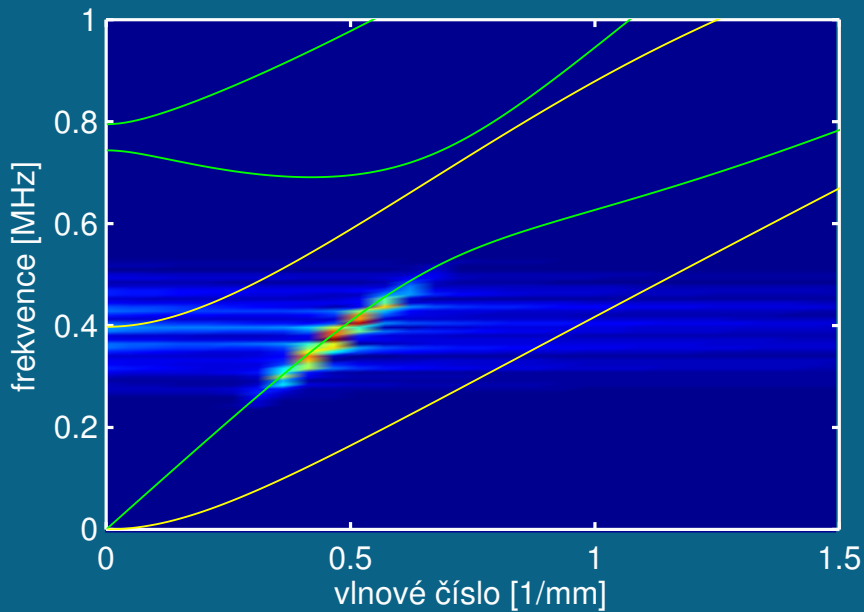
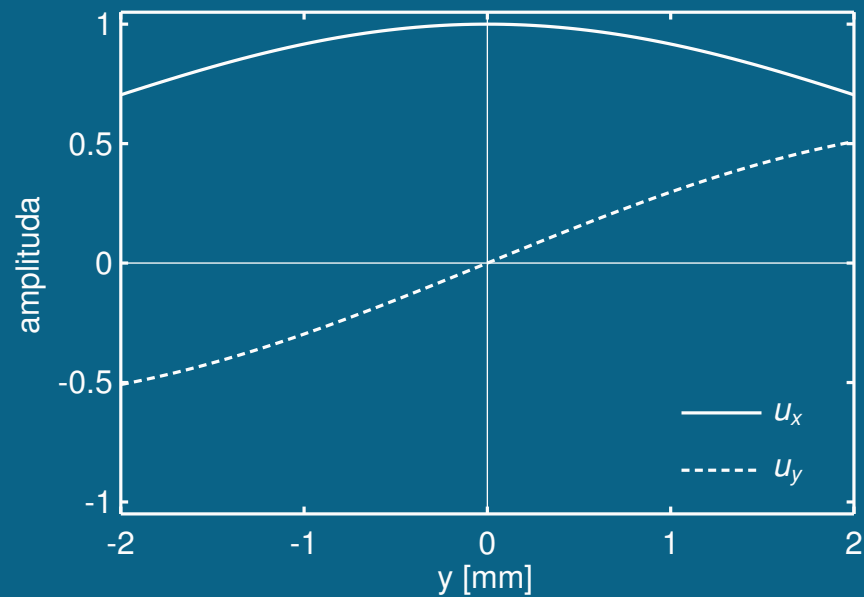
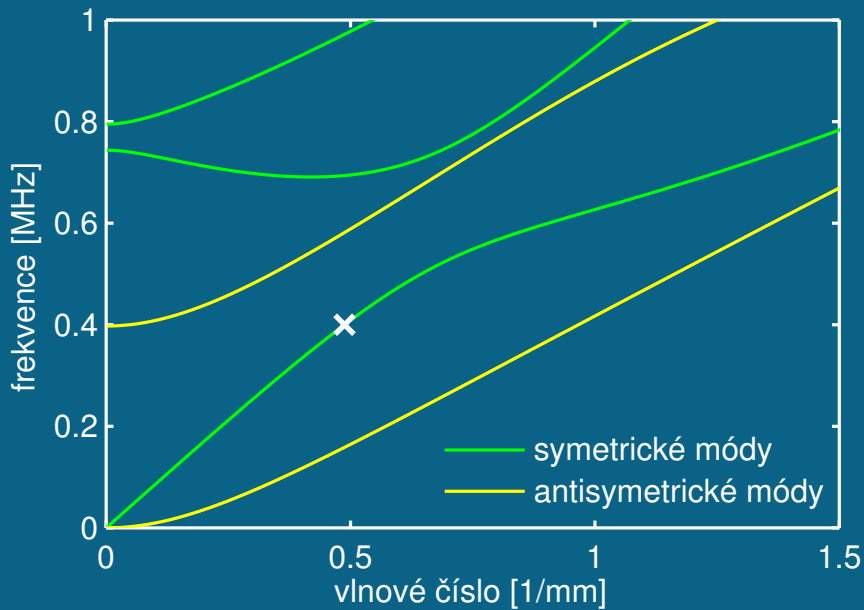
mód =  $s_0$ ,  $f_0 = 0.4 \text{ MHz}$ ,  $N_c = 5$



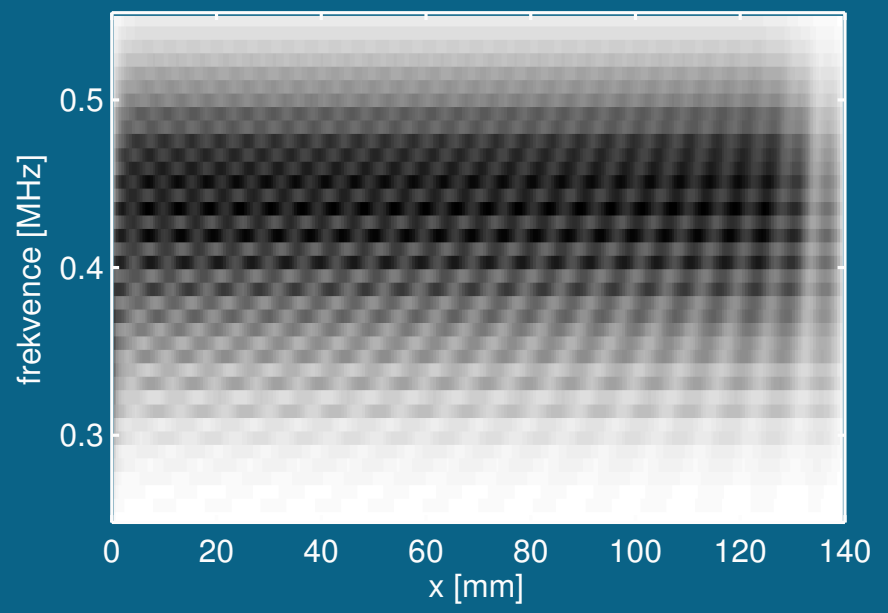
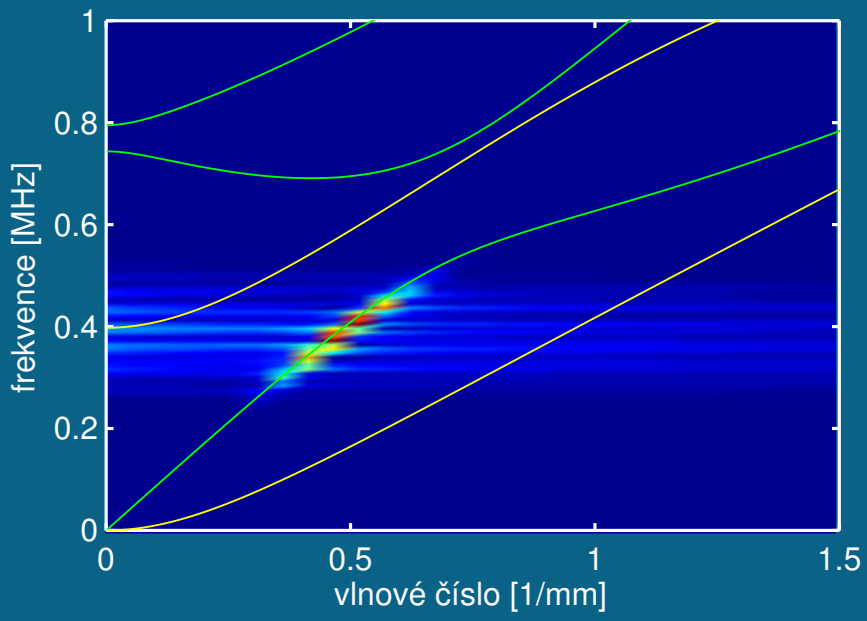
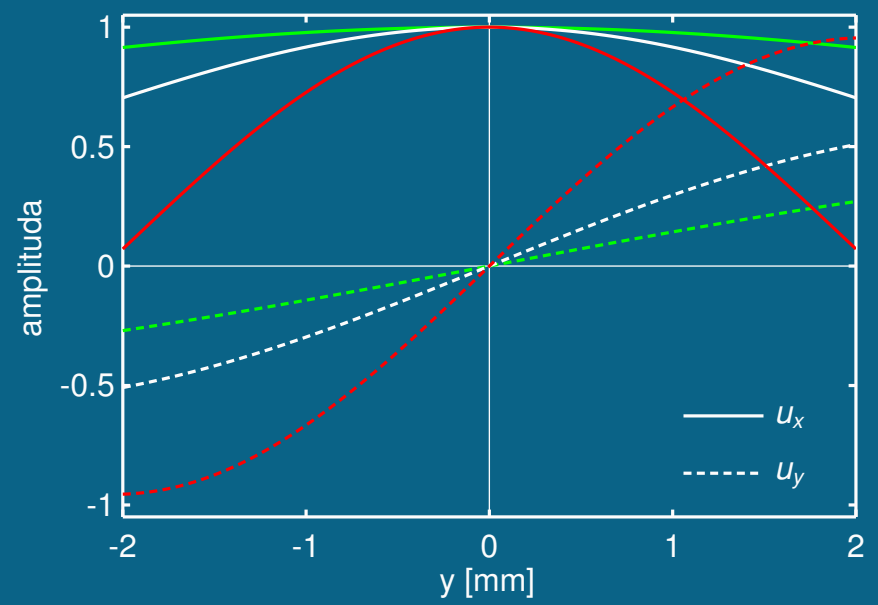
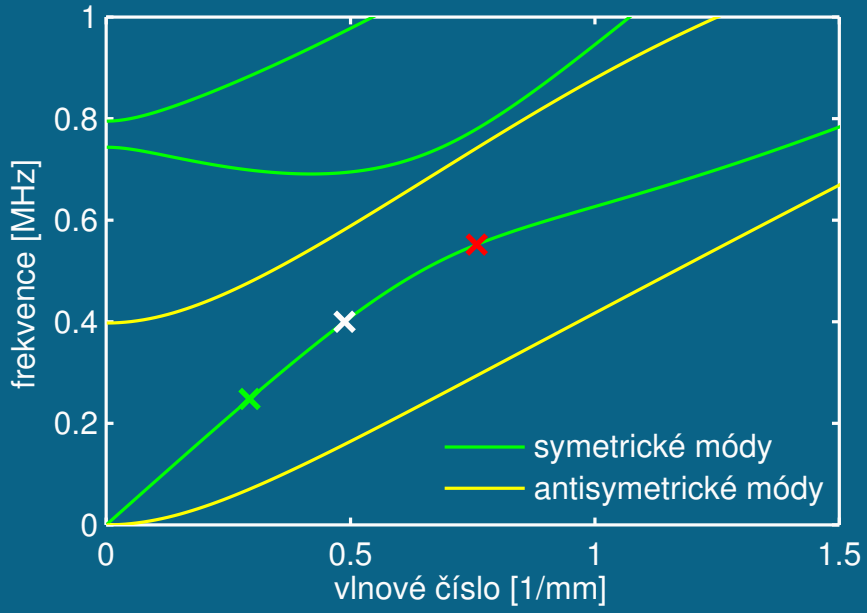
# Absorbér



mód =  $s_0$ ,  $f_0 = 0.4$  MHz,  $N_c = 5$



mód =  $s_0$ ,  $f_0 = 0.4 \text{ MHz}$ ,  $N_c = 5$



## Závěr

- Oba algoritmy (2D a 1D-FFT) lze použít i pro odhad disperzních křivek jiných geometrií než jen tlusté desky.
- Výpočet disperzních křivek pomocí 1D-FFT je:
  - rychlejší, cca 10x,
  - méně náročný na paměťový prostor počítače, cca 30x,
  - lze použít absorbér → použití pro visko-elestické problémy.

## OBSAH

Úvod

Řešená úloha

Metody určení disperzních křivek

Algoritmy

Budící puls

Disperzní vztahy

Disperzní křivky

Vlastní tvary

Disperzní křivky pomocí 2D-FFT

Disperzní křivky pomocí 1D-FFT

Závěr