

P. Hora, F. Vales, J. Patek, CSAV, Pilsen (Pizen), CS

Vergleich der verschiedenen Lösungsmethoden des Spannungszustandes des Halbraumes



In der vorliegenden Arbeit sind theoretische Zeitläufe der vertikalen und horizontalen Verschiebungen auf der Halbraumboberfläche bei der durch die Punktkraft mit dem sprunghaften Zeitverlauf hervorgerufenen Oberflächenquellenerregung angeführt. Diese theoretischen Verläufe wurden durch die analytische Lösung des Spannungszustandes im Halbraum und der dicken Platte gewonnen. Zum Schluß sind die Ergebnisse der Messungen mit dem Breitbandaufnehmer mit dem kegelförmigen piezoelektrischen aktiven Element angeführt. Die Ergebnisse können für die quantitative (absolute) Kalibration des Aufnehmers genutzt werden.

Der mit einer ebenen Oberfläche begrenzte Halbraum ist mit Ausnahme vom Kontinuum das einfachste Modell für das Studium der elastischen Wellen in den Festkörpern. Lamb [LAMO4] hat im Jahre 1904 die Lösung sowohl für die Liniequelle als auch für die Punktquelle auf der Halbraumboberfläche teilweise gefunden. Obwohl Lamb die Möglichkeit der Rücktransformation der Zeitveränderlichen angedeutete, hat er nur die asymptotische Lösung für die Verschiebungen abgeleitet. Im Jahre 1939 hat Cagniard [CAG39] die allgemeine Rücktransformationsmethode entwickelt. Die Lösung wurde für die vertikale Kraft vom Pekeris [PEK55] und für die horizontale Kraft vom Chao [CHA60] beendet. Andere Möglichkeit den Halbraumspannungszustand zu behandeln, ist die Lösung für die dicke Platte [VAL84] auszunutzen, nämlich für einen begrenzten Zeitabschnitt, bei dem die Reflexion der Spannungswellen von der unteren Plattenoberfläche noch nicht zum Ausdruck kommt.

Verschiebungen auf der Halbraumoberfläche bei der durch die vertikale Punktkraft mit dem sprunghaften Zeitverlauf hervorgerufenen Oberflächenquellenerregung

Behandelt wird ein Fall des Halbraumes, auf dessen Oberfläche die vertikale Punktkraft mit dem sprunghaften Zeitverlauf (Heaviside) einwirkt (s. Abb.1).

Nach Mooney [MOO74] gilt für die vertikalen Verschiebungen

$$w(\tau) = \frac{\delta^2 F}{\pi \mu r} G(\tau)$$

und für die horizontalen Verschiebungen

$$q(\tau) = \frac{\delta^2 F}{\pi \mu r} R(\tau),$$

wobei F Größe der wirkenden Kraft, r Distanz zwischen Aufnehmer und Quelle, μ Lamésche Konstante, δ Geschwindigkeitsverhältnis (c_p/c_s), c_p die Geschwindigkeit der longitudinalen Wellen, c_s die Geschwindigkeit der transversalen Wellen, τ die normierte Zeit ($\tau=c_s/r*t$), t Realzeit, $G(\tau)$ die normierte vertikale Verschiebung und $R(\tau)$ die normierte horizontale Verschiebung ist.

Die Verläufe $G(\tau)$ und $R(\tau)$ für Poisson-Zahl $\nu=0.25$ werden in der Abb.2 bzw. Abb.3 dargestellt.

Einige Bemerkungen zu den Verläufen in der Abb.2,3 :

- alle Verschiebungen hängen direkt proportional von der wirkenden Kraft ab;
- Ankunftszeiten sind nachfolgend :
zuerst kommt die longitudinale Welle (P), dann die transversale Welle (S) und endlich "Rayleighsche Welle" (R),
- für $\tau < 1/\delta$ existieren noch keine Verschiebungen, denn die schnellste, d.h. longitudinale, Welle hat noch nicht den erwogenen Punkt erreicht,
- die sprunghaft wirkende vertikale Kraft löst die komplizierte Signalform mit sowohl positiven als auch negativen Verschiebungen (mit den sanften Wellenfronten) aus,
- Ankunft der P-Welle ist bei der horizontalen Verschiebung markanter als bei der vertikalen Verschiebung,
- Ankunft der S-Welle ist dagegen kaum verstellbar. Sie würde sich deutlicher bei den höheren Zeitableitungen der Verschiebungen bemerkbar machen; d.h. zum Beispiel bei der Geschwindigkeit,
- die Wirkungen der P- und S-Wellen sind weit geringer als die Wirkung "der Rayleighschen Welle". Ihre Wirkung klingt schneller ab. Die Lösung des Fernfeldes enthält nur "den Rayleighschen Puls".

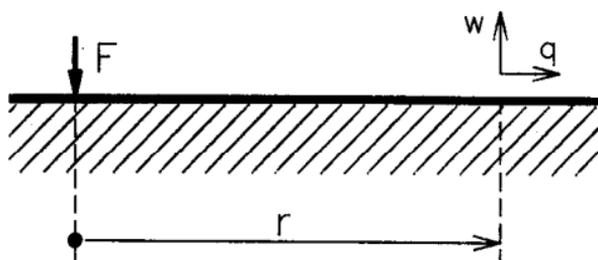


Abb.1 Oberflächenquellenerregung durch die Punktkraft

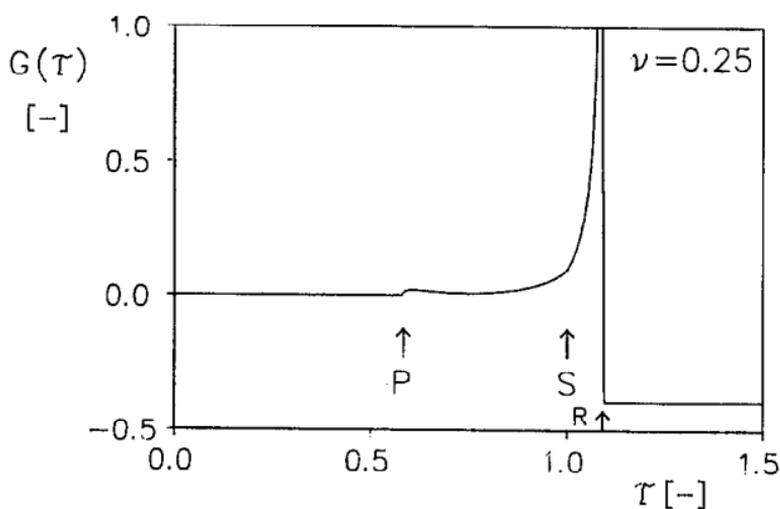


Abb.2 Verlauf der normierten vertikalen Verschiebung

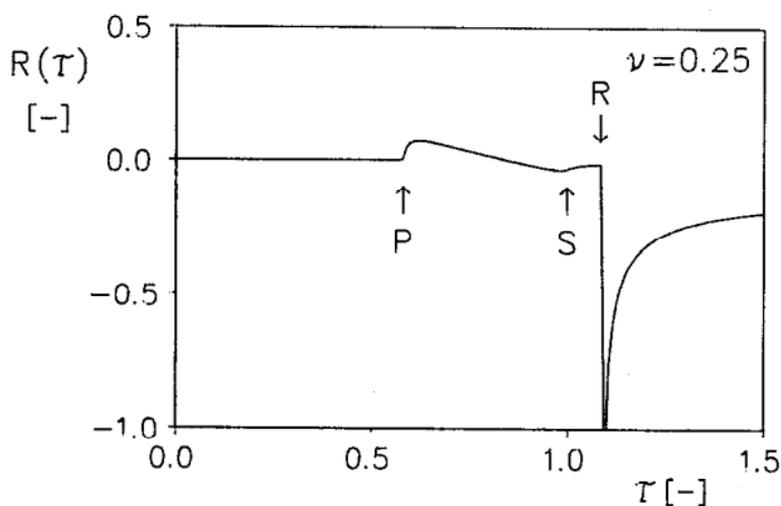


Abb.3 Verlauf der normierten horizontalen Verschiebung

Verschiebungen auf der Halbraumboberfläche bei der durch die kreisförmige Querbelastung mit dem sprunghaften Zeitverlauf hervorgerufenen Oberflächenquellenerregung

Behandelt wird ein Fall des Halbraumes, auf dessen Oberfläche die kreisförmige Querbelastung mit dem sprunghaften Zeitverlauf (Heaviside) einwirkt (s. Abb.4).

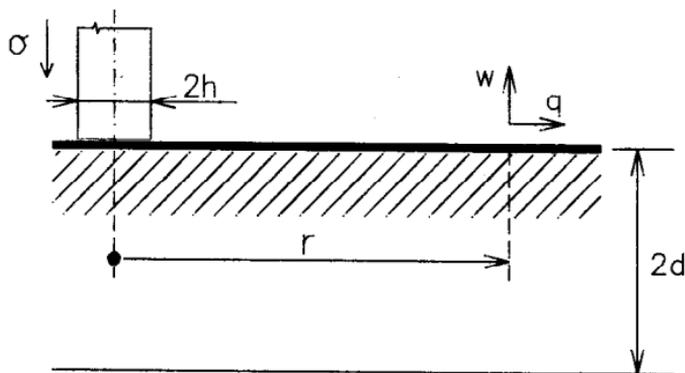


Abb.4 Oberflächenquellenerregung durch die kreisförmige Querbelastung

In [VAL84] wird die Lösung für die dicke Platte beschrieben. Für einem begrenzten Zeitabschnitt, bei dem die Reflexion von der unteren Oberfläche noch nicht zum Ausdruck kommt, können wir diese Ergebnisse auch für den Spannungszustand im Halbraum benutzen.

Nach [VAL84] folgt für die vertikalen Verschiebungen

$$w(\tau) = \frac{\sigma h}{4\mu} \int_0^{\infty} \left(\frac{F}{M} \cos\left(\frac{c_p}{d} \xi_n y d\right) + \frac{G}{N} \cos\left(\frac{c_s}{d} \eta_n y d\right) \right) J_0\left(\gamma d \frac{r}{d}\right) \frac{J_1\left(\gamma d \frac{h}{d}\right)}{\gamma d} d(\gamma d)$$

und für die horizontalen Verschiebungen

$$q(\tau) = \frac{\sigma h}{4\mu} \int_0^{\infty} \left(\frac{F'}{M} \cos\left(\frac{c_p}{d} \xi_n y d\right) + \frac{G'}{N} \cos\left(\frac{c_s}{d} \eta_n y d\right) \right) J_1\left(\gamma d \frac{r}{d}\right) \frac{J_1\left(\gamma d \frac{h}{d}\right)}{\gamma d} d(\gamma d)$$

wobei σ Größe der wirkenden vertikalen Normalspannung, h Radius der Kreisfläche, $2d$ Dicke der Platte, μ Lamésche Konstante, r Distanz zwischen Aufnahme und Quelle, τ die normierte Zeit ($\tau = c_p/d * t$), t Realzeit, γd der dimensionslose Wellenzahl ist; ξ_n und η_n die dimensionslose Phasengeschwindigkeiten sind.

Größen γd und ξ_n bzw. η_n werden durch die transzendentale Gleichungen gekoppelt, die die Form der Rayleigh-Lamb's Gleichungen der Dispersionskurven entsprechen (s. Abb.5 und Abb.6).

Der erste Ausdruck in den Summen entspricht dem Beitrag der longitudinalen Wellen und der zweite Ausdruck dem Beitrag der transversalen Wellen. Der Verlauf der normierten vertikalen und horizontalen Verschiebung für Poisson-Zahl $\nu=0.3$ und für 75 Summanden der Integrale wird in der Abb.7 bzw. Abb.8 dargestellt.

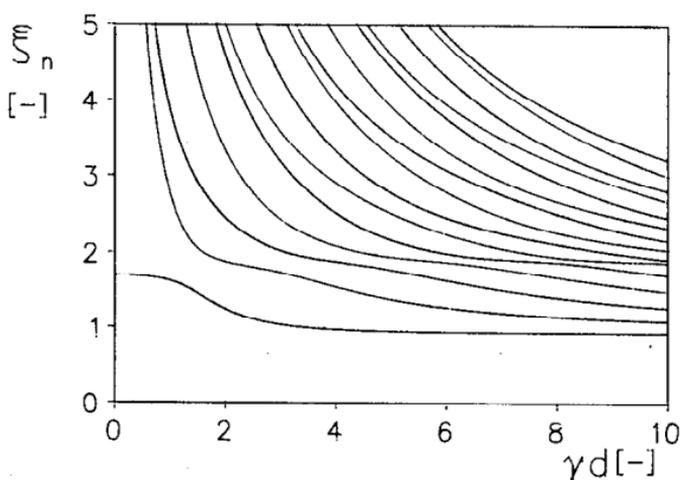


Abb.5 Dispersionskurven für die longitudinalen Wellen

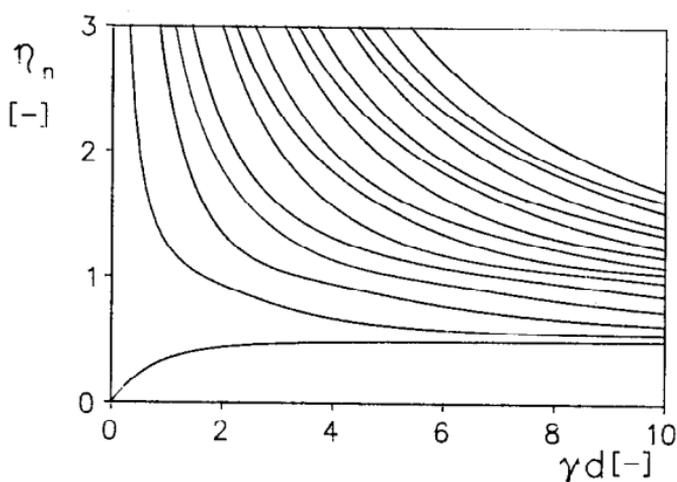


Abb.6 Dispersionskurven für die transversalen Wellen

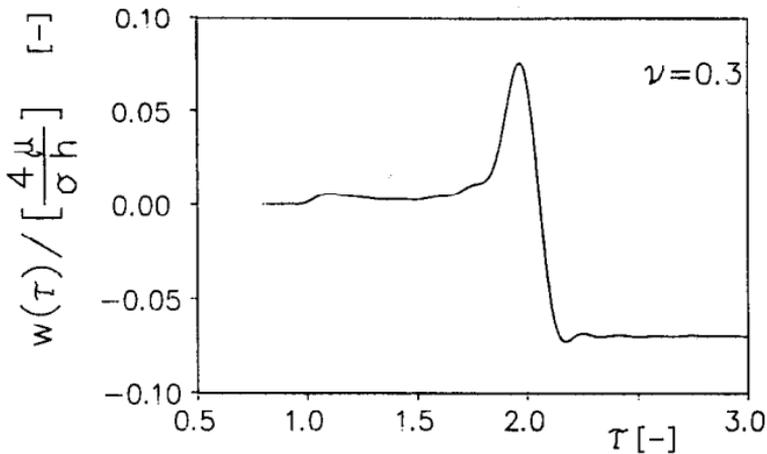


Abb.7 Verlauf der normierten vertikalen Verschiebung

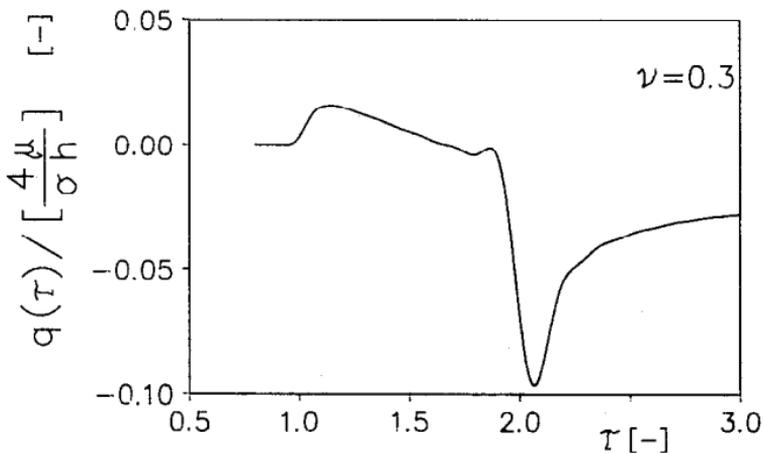


Abb.8 Verlauf der normierten horizontalen Verschiebung

Einfluß der Zahl der Summanden

In der Abb.9,10 und 11 wird der Einfluß der bei der Berechnung bedachten Zahl der Summanden demonstriert. Aus diesen Verläufen ist bemerkbar, daß der dominierende Einfluß vom ersten Summand (von der ersten Dispersionskurve) stammt. Die weiteren Summanden präzisieren schon nur den Verlauf.

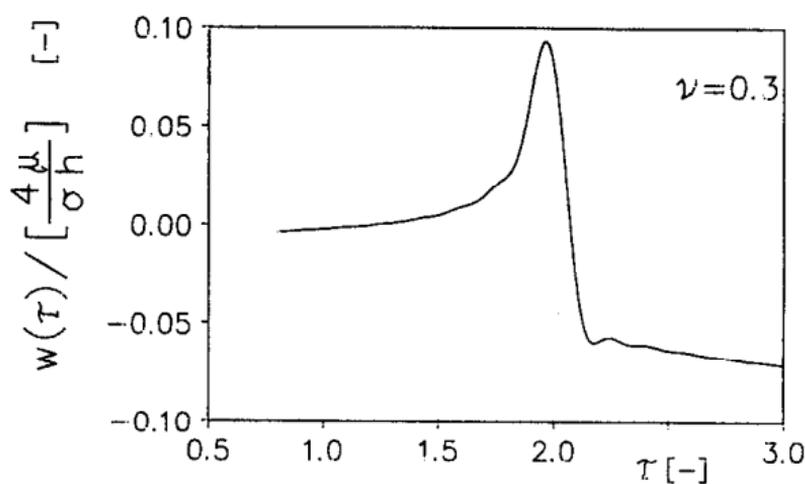


Abb.9 Beitrag des ersten Summands zur normierten vertikalen Verschiebung

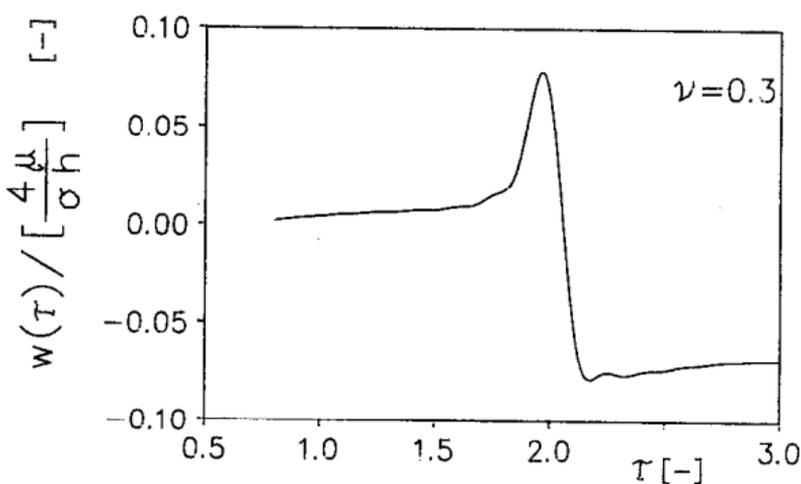


Abb.10 Beitrag der ersten zwei Summanden zur normierten vertikalen Verschiebung

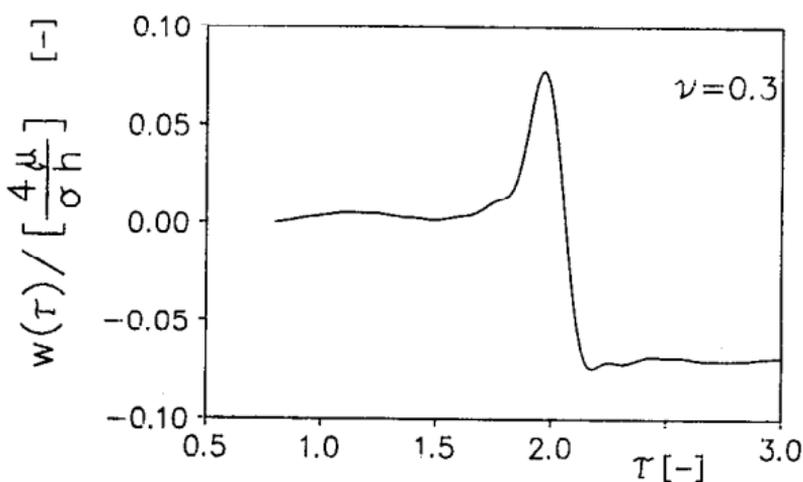


Abb.11 Beitrag der ersten fünf Summanden zur normierten vertikalen Verschiebung

**Berechnung der Verschiebungen bei der kreisförmigen
Querbelastung, gewonnen durch Superposition
der Verschiebungen durch die Punktkraft**

Die Verschiebungen auf der Halbraumoberfläche bei der durch die kreisförmige Querbelastung mit dem sprunghaften Zeitverlauf hervorgerufenen Oberflächenquellenerregung können durch Superposition der Verschiebungen der Halbraumoberfläche durch die vertikale Punktkraft mit dem sprunghaften Zeitverlauf hervorgerufenen Oberflächenquellenerregung gewonnen werden.

Die Aufgabe wird in der Abb.12 dargestellt.

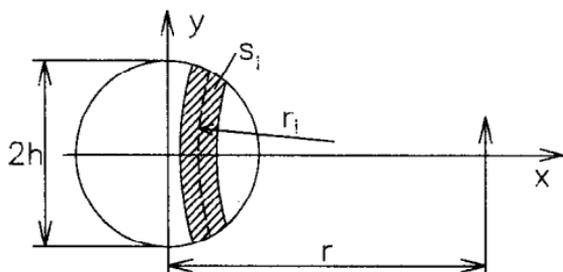


Abb.12

Die Kreisfläche wird durch die Kreisbogen in N Segmente verteilt. Diese Kreisbogen haben ihre Mittelpunkte im Messungspunkt und ihren Radien ändern sich von $r-h$ zu $r+h$. Die Verschiebungen bei der kreisförmigen Querbelastung sind

$$F_r = \sum_{i=1}^N s_i / S f(r_i),$$

wobei S Kreisfläche, s_i Segmentsfläche i , und $f(r_i)$ die Verschiebung bei der vertikalen Punktkraft in der Distanz r_i ist.

Für s_i folgt die Beziehung

$$s_i / 2 = \int_{r-r_i-d/2}^{x_1} \sqrt{(r_i+d/2)^2 - (x-r)^2} dx + \int_{x_1}^h \sqrt{h^2 - x^2} dx$$

$$- \int_{r-r_i+d/2}^{x_2} \sqrt{(r_i-d/2)^2 - (x-r)^2} dx - \int_{x_2}^h \sqrt{h^2 - x^2} dx$$

wobei $x_{1,2} = [r^2 + h^2 - (r_1 \pm d/2)^2] / (2r)$, $r_1 = r - h + d/2 + (i-1)d$
 und $d = 2h/N$.

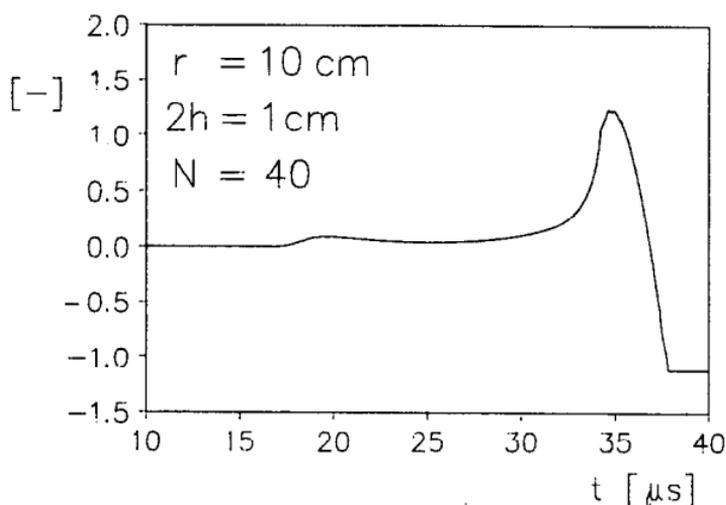


Abb.13 Verlauf der normierten vertikalen Verschiebung bei der kreisförmigen Querbelastung - Superposition

Abschliessende Feststellung

Durch den Vergleich der Lösung des Spannungszustandes des Halbraumes und der dicken Platte folgen diese Feststellungen :

- für den Halbraum hat die Lösung die Form der endlichen Summe der Integrale; Die Genauigkeit wird nur durch die numerischen Fehler bei der Berechnung der Integrale beeinflusst.
- für die Platte hat die Lösung die Form der unendlichen Summe der Integrale. Die numerische Berechnung dieser Integrale ist wesentlich anspruchsvoller.
- durch den Vergleich der Verläufe in Abb.2 und Abb.7 bzw. Abb.3 und Abb.8 sieht man, daß
 - a) durch den Einfluß der Flächenerregung kommt zur Reduzierung des Gradienten der Wellenfront und zu der Reduzierung der maximalen Werte der Verschiebungskomponente
 - b) diese Tendenz wird noch bei der Lösung des Spannungs-

- zustandes der Platte vergrößert durch die endliche Zahl der benutzen Summanden
- die Lösungen des Spannungszustandes des Halbraumes können bei der Kalibration der Aufnehmer (Kapillarenbrechung) genutzt werden;
 - die Lösungen des Spannungszustandes der Platte können bei der Kalibration der Aufnehmer (fallender dünner Stoßstab) genutzt werden;
 - die Lösungen des Spannungszustandes der Platte können vor allem für die Beurteilung des Einflusses der endlichen Querdimension eines elastischen Körpers bei dem nicht stationären Belastungszustand genutzt werden;

Literatur

- [CAG39] Cagniard, L.:
 Reflexion et refraction des Ondes
 seismiques progressives.
 Gauthier Villars, Paris, (1939)
- [CHA60] Chao, C.:
 Dynamical response of an elastic half-space
 to tangencial loadings.
 J.Appl.Mech., Vol.27, (1960), p.559
- [LAM04] Lamb, H.:
 On the Propagation of Tremors Over
 the Surface of an Elastic Solid.
 Philos. Trans. Roy. Soc. (London),
 Ser.A, Vol.203, (1904), pp.1-42
- [MOO74] Mooney, H. M.:
 Some numerical solutions for Lamb's problem.
 Bull.Seism.Soc.Am., Vol.64, (1974), pp.473-491
- [PEK55] Pekeris, C.:
 The seismic surface pulse.
 Proc.Nat.Acad.Sci., Vol.41, (1955), p.469
- [VAL84] Valeš, F.:
 Výzkumná zpráva ÚT ČSAV, Z887/84, Praha, (1984)