STROJNICKÝ SBORNÍK
TECHNICKO-VĚDECKÉ PRÁCE FAKULTY STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ ČVUT

ING. RUDOLF BREPTA*)

POHYB BODU V ODPORUJÍCÍM PROSTŘEDÍ — QUASICENTRÁLNÍ POHYB

(Práce předložena 3. 9. 1953)

Recensoval:
Prof. Ing. Dr Josef Šrejtr

531.1

1,0 Úvod

Pohybuje-li se bod, na který působí síla stále směřující k pevnému bodu a tato síla je funkcí vzdálenosti od tohoto bodu, mluvíme o centrálním pohybu. Působící sílu nazýváme centrální silou. Na druhu závislosti centrální síly závisí tvar křivky, kterou bod opisuje. Všechny tyto centrální pohyby mají významnou společnou vlastnost, že dráhy bodu jsou vždy rovinné křivky. Pokud jde o zákony funkční závislosti průběhu centrální síly, jsou to nejčastěji přitažlivé síly úměrné vzdálenosti od centra nebo síly, které se řídí Newtonovým gravitačním zákonem.

Působí-li na bod kromě centrální síly ještě odpor prostředí, půjde tu o pohyby, které se zřetelem na přítomnost centrální síly nazýváme pohyby quasicentrálními.

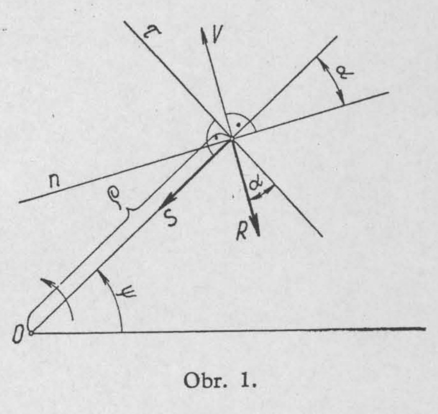
V následujících oddílech jsou probrány obecné závislosti pro různé závislosti odporu prostředí na rychlosti pohybu a vývody jsou pak aplikovány na sférické kyvadlo.

2,0 Obecné závislosti

Na bod hmoty m působí kromě centrální síly S ještě odporová síly R. Směřuje proti okamžité rychlosti v (viz *obr. 1*).

Pro matematické vyjádření použijeme s výhodou polárních souřadnic.

Napíšeme jednak pohybové rovnice bodu ve směru průvodiče ϱ, jednak ve směru τ, který je na tento průvodič kolmý.



Obr. 1.

Složka zrychlení ve směru ϱ je:

$$\varrho \ldots \frac{d^2\varrho}{dt^2} - \varrho\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2$$

a je složena z druhé derivace ϱ podle t a ze zrychlení dostředivého, které přísluší otáčení průvodiče ϱ. Toto je význam druhého členu.

Složka zrychlení ve směru τ je

$$\tau \ldots \varrho\frac{d^2\psi}{dt^2} + 2\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)\left(\frac{d\psi}{dt}\right).$$

První člen vyjadřuje tečné zrychlení, dané otáčením průvodiče ϱ, druhý člen je Coriolisovo zrychlení, které je kolmé na ϱ. Celý tento výraz se dá v kompaktním tvaru vyjádřit jako

$$\frac{1}{\varrho}\frac{d}{dt}\left[\varrho^2\left(\frac{d\psi}{dt}\right)\right].$$

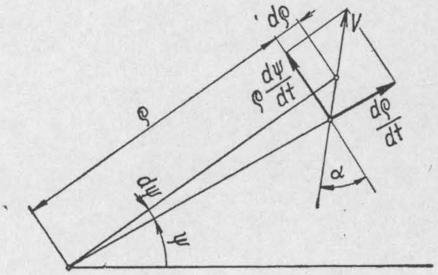
*) Vysoká škola železniční — Praha.

Použitím těchto vztahů máme pro pohybové rovnice výrazy:

$$m\left[\frac{\mathrm{d}^2\varrho}{\mathrm{d}t^2} - \varrho\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\right)^2\right] = -S - R\sin\alpha \tag{1}$$

$$\frac{m}{\varrho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\varrho^2\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\right)\right] = -R\cos\alpha \tag{2}$$

Tyto rovnice ovšem platí pro libovolný zákon centrální síly S. Všimněme si obzvláště rovnice (2), která je pozoruhodná tím, že neobsahuje sílu S. Nejprve vhodným způsobem vyjádříme funkci $\cos\alpha$. Podle *obr. 2* platí



Obr. 2.

$$\cos\alpha = \frac{\varrho\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\right)}{v},$$

když jsme si předtím rozložili rychlost v na dvě složky, a to: obvodovou $\varrho\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\right)$ a radiální $\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}t}$.

Rovnice (2) se tímto dosazením změní ve výraz:

$$\frac{m}{\varrho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\varrho^2\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\right)\right] = -R\cdot\frac{\varrho\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\right)}{v}$$

$$\frac{m}{\varrho^2\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\right)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\varrho^2\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\right)\right] = -\frac{R}{v}.$$

Povšimněme si, že levá strana rovnice je vlastně derivací výrazu $\ln\left[\varrho^2\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\right)\right]$ podle času. Tento tvar rovnice je velmi výhodný a budeme ho nadále používat.

$$m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\ln\left(\varrho^2\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\right)\right] = -\frac{R}{v}. \tag{3}$$

Možnost integrace vztahu (3) závisí tedy jen na zákonech, které platí pro odporovou sílu R. Pro kvantitativní vyjádření odporové síly použijeme dvou druhů závislostí, kterých se běžně v mechanice používá. Je to hlavně lineární závislost odporu na rychlosti, t. j. vztah: $R = 2\,\varkappa m v$; dále závislost na čtverci rychlosti, t. j. vztah $R = m\beta v^2$.

Vyřešíme nejprve pohyb s odporem lineárně závislým na rychlosti.

Pohybová rovnice je:

$$m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\ln\left(\varrho^2\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\right)\right] = -2\varkappa\, m$$

a po separování proměnných nám vychází diferenciální rovnice, kterou lze integrovat:

$$\mathrm{d}\left[\ln\left(\varrho^2\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\right)\right] = -2\,\varkappa\,\mathrm{d}t.$$

Po integraci dostáváme výsledek:

$$\ln\left(\varrho^2\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\right) = -2\,\varkappa t + \ln A$$

$$\varrho^2\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = A\,\mathrm{e}^{-2\varkappa t} \tag{4}$$

Význam integrační konstanty A je tento: levá strana rovnice vyjadřuje moment rychlosti. Pro $t = 0$ je tento moment roven konstantě A, t. j. momentu rychlosti na začátku pohybu. Připomeňme si známý výsledek, který platí pro centrální pohyb (v ideálním prostředí), že totiž moment rychlosti je stálý. Jestliže položíme $\varkappa = 0$, t. j. odstraníme odporovou sílu R, dostaneme tento zákon; čili jinými slovy je obsažen v našem obecnějším zákoně daném rovnicí (4). Vztah je dále důležitý tím, že *neobsahuje centrální sílu S, platí tedy pro každý pohyb za působení centrální síly S, která je dána libovolným zákonem.* Moment rychlosti tedy klesá podle exponenciální závislosti na čase t.

Řešme nyní rovnici (3) pro odpor závislý na druhé mocnině rychlosti $R = m\beta v^2$. Máme tu:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\ln\left(\varrho^2\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\right)\right] = -\beta v$$

$$\mathrm{d}\left[\ln\left(\varrho^2\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\right)\right] = -\beta v \mathrm{d}t;$$

připomeňme si, že platí $v \cdot \mathrm{d}t = \mathrm{d}s$, kde $\mathrm{d}s$ je přírůstek dráhy

$$\mathrm{d}\left[\ln\left(\varrho^2\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\right)\right] = -\beta \mathrm{d}s.$$

Je to i v tomto případě rovnice, která má proměnné separovány, tentokrát místo proměnné t máme proměnnou s. Po integraci je

$$\ln\left(\varrho^2\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\right) = -\beta s + \ln B$$

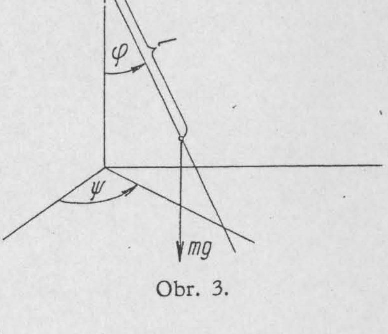
$$\varrho^2\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = \mathrm{B}e^{-\beta s} \tag{5}$$

Konstanta B má stejný význam jako dříve konstanta A.

Tím jsme odvodili obecné vlastnosti a nyní je budeme aplikovat na konkretní případ, t. j. na sférické kyvadlo pro malé rozkyvy.

3,0 Sférické kyvadlo při malých rozkyvech v neodporujícím prostředí

V této kapitole odvodíme vztahy, které nám budou východiskem pro řešení pohybu sférického kyvadla v odporujícím prostředí. Vyjdeme z rovnic pro konečné rozkyvy kyvadla, jak je lze nalézt na př. ve spise A. Föppla: Die wichtigsten Lehren der höheren Dynamik. Tyto rovnice zde nebudeme odvozovat, ale použijeme jich v hotovém tvaru. V rovnicích se vyskytují dvě nezávislé souřadnice, a to úhel mezi vláknem kyvadla a svislicí, který označíme φ, a úhel, který svírá okamžitá rovina kyvadla s jistou výchozí rovinou; tento úhel označíme jako ψ. Rovinou kyvadla rozumíme rovinu, která v daném okamžiku prochází vláknem kyvadla a zmíněnou svislicí (*obr. 3*). Charakteristickou veličinou kyvadla je jeho délka l.



Obr. 3.

Dvě pohybové rovnice, které pohyb kyvadla určují, jsou:

$$-\frac{g}{l}\sin\varphi = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} - \sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\right)^2 \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sin^2\varphi\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\right) = \emptyset\,. \tag{7}$$

Z těchto vztahů odvodíme rovnice, kterými přibližně vyjádříme pohyb pro malé hodnoty úhlu φ. Můžeme proto přibližně předpokládat:

$$\sin\varphi \doteq \varphi \text{ a } \cos\varphi = 1;$$

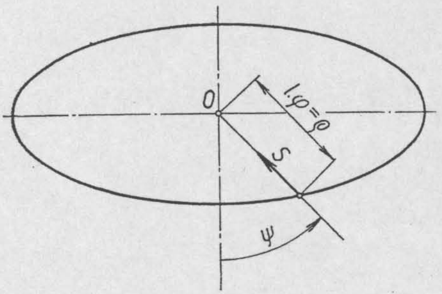
za těchto předpokladů dosazením do rovnic (6) a (7) vyjde:

$$-\frac{g}{l} = \varphi\frac{d^2\varphi}{dt^2} - \varphi\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 \tag{8}$$

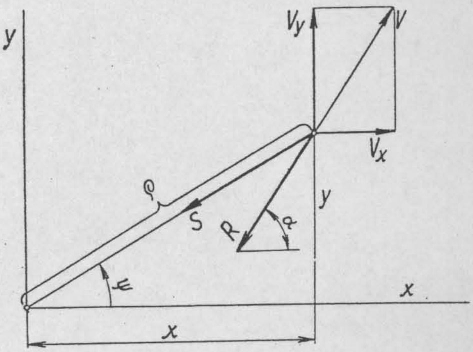
$$\frac{d}{dt}\left(\varphi^2\frac{d\psi}{dt}\right) = \emptyset \tag{9}$$

Integrací rovnice (9) dostáváme:

$$\varphi^2\frac{d\psi}{dt} = C. \tag{10}$$



Obr. 4.



Obr. 5.

Tento výsledek není ovšem ničím jiným než aplikací věty o změně impulsmomentu.

Zvláště nás zajímá určení doby kyvu a tvar dráhy bodu kyvadla. Obě úlohy se řeší zároveň, jestliže si uvědomíme, že hořejší předpoklad znamená, že koncový bod se pohybuje v tečné rovině ke kouli, která je opsána poloměrem l ze závěsného bodu kyvadla. Zmíněná tečná rovina se kulové plochy dotýká v jejím nejnižším bodě. Promítneme-li si pohyb do této tečné roviny (*obr. 4*), zjistíme, že jediná vnější síla, která na bod kyvadla působí, je složka síly v závěsném vlákně. Tato síla se v prvním přiblížení rovná

$$S = m \cdot g \cdot \varphi. \tag{11}$$

Do této tečné roviny se promítne délka vlákna l jako míra $l \cdot \varphi$. Označme tuto míru jako polární průvodič ϱ; tedy

$$\varrho = l \cdot \varphi.$$

Jestliže vyloučíme z rovnice (11) φ, dostáváme

$$S = m\frac{g}{l}\varrho\ . \tag{12}$$

Máme tedy pohyb bodu, na který působí pouze centrální síla S, která je přímo úměrná vzdálenosti ϱ. Tím jsme ovšem případ sférického kyvadla pro malé rozkyvy převedli na „rovinný“ pohyb bodu, na který působí centrální síla. Je známo, že tento úkol je totožný s problémem obecného kmitavého pohybu v rovině. Je tedy nutně drahou (trajektorií) bodu elipsa. Pokud jde o dobu kyvu, t. j. o dobu oběhu bodu po eliptické dráze, máme pro obecný kmitavý pohyb vztah:

$$T = \frac{2\pi}{\Omega}\ ; \quad \Omega^2 = \frac{g}{l}\ ,$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\ . \tag{13}$$

Tím jsme vyřešili případ malých kyvů sférického kyvadla v prostředí bez odporu.

Poznámka: K těmto závěrům můžeme dojít také z rovnic (8) a (10), jestliže si uvědomíme, že to jsou pohybové rovnice pro obecný kmitavý pohyb, ovšem pro polární souřadnice, a to $\varrho = l\varphi$ a amplitudu ψ. Postačí rovnici (8) vynásobit součinem ml a máme

$$m \left[l \frac{d^2\varphi}{dt^2} - l\varphi \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \right] = - mg\,\varphi\,, \tag{8a}$$

což je rovnice pohybu ve směru průvodiče ϱ. Levá strana této rovnice je výrazem pro zrychlující sílu a pravá strana je výrazem pro centrální přitažlivou sílu, která je úměrná vzdálenosti — naše známá síla S z rovnice (11). Rovnice (10) platí v tomto tvaru pro všechny centrální síly bez zřetele na zákon jejich změny. Také tím jsou naše tvrzení prokázána.

4,0 Sférické kyvadlo v prostředí, které odporuje silou $R = 2\varkappa mv$

Pro odvození obecných závislostí v odd. 2 jsme použili polárních souřadnic; zde však — jak dále uvidíme — je výhodné použít pravoúhlé soustavy souřadnic. Síly, které působí na bod, promítáme do os x a y (*obr. 5*) a píšeme příslušné dvě pohybové rovnice:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = - S \cos \psi - R \cos \alpha \tag{14}$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = - S \sin \psi - R \sin \alpha \tag{15}$$

Přitom přitažlivá síla je

$$S = m \frac{g}{l} \varrho\,.$$

Goniometrické funkce úhlů ψ a α vyjádříme pomocí souřadnic x, y a složek rychlosti v_x, v_y:

$$\sin \psi = \frac{y}{\varrho}, \qquad \cos \psi = \frac{x}{\varrho},$$

$$\sin \alpha = \frac{v_y}{v}, \qquad \cos \alpha = \frac{v_x}{v}.$$

Použitím těchto závislostí přepíšeme pohybové rovnice do tvaru:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = - m \frac{g}{l} \cdot \varrho \cdot \frac{x}{\varrho} - 2\,\varkappa mv \cdot \frac{v_x}{v}$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = - m \frac{g}{l} \cdot \varrho \cdot \frac{y}{\varrho} - 2\,\varkappa mv \cdot \frac{v_y}{v}\,.$$

Dále můžeme použít vztahů: $v_x = \dfrac{dx}{dt}$, $v_y = \dfrac{dy}{dt}$, kterými se rovnice převedou na následující konečný tvar (při tom zároveň položíme $\dfrac{g}{l} = \Omega^2$):

$$\frac{d^2x}{dt^2} = - \Omega^2 x - 2\,\varkappa \frac{dx}{dt} \tag{16}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = - \Omega^2 y - 2\,\varkappa \frac{dy}{dt} \tag{17}$$

Tyto dvě diferenciální rovnice s konstantními součiniteli jsou rovnicemi dvou tlumených kmitavých pohybů ve směru os x a y. Vznikne tedy trajektorie bodu geometrickým sečtením dvou tlumených kmitavých pohybů ve dvou kolmých směrech.

Rovnice mají společnou charakteristickou rovnici:

$$\lambda^2 + 2\varkappa\lambda + \Omega^2 = 0,$$

která je obdobná rovnici pro tlumený kmitavý pohyb s jedním stupněm volnosti. Její řešení je

$$\lambda_{1,2} = -\varkappa \pm \sqrt{\varkappa^2 - \Omega^2}.$$

Kvalita kořenů závisí na hodnotě výrazu pod odmocninou, t. j. na velikosti tlumicího — odporového součinitele $\varkappa$. Pro nás mají ovšem hlavní význam případy s malým tlumením, t. j.

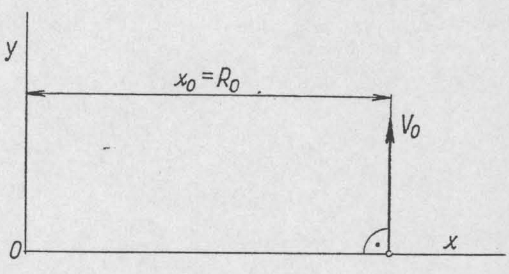
$$\Omega > \varkappa$$

nanejvýš mez aperiodického pohybu, kdy $\varkappa = \Omega$.

Uveďme nejprve řešení pro malý součinitel $\varkappa$; položíme-li $\sqrt{\Omega^2 - \varkappa^2} = \omega$, máme:

$$\left.\begin{aligned} x &= e^{-\varkappa t}(K \sin \omega t + L \cos \omega t) \\ y &= e^{-\varkappa t}(M \sin \omega t + N \cos \omega t) \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

kde čtyři navzájem nezávislé integrační konstanty určíme ze dvou podmínek pro počáteční polohu bodu a ze dvou podmínek pro počáteční složky rychlosti.



Obr. 6.

Stanovme tyto konstanty pro případ nejjednodušší, kdy počáteční rychlost je kolmá na průvodič bodu (*obr. 6*). Pro čas $t = 0$ je

$$x = R_o, \quad y = 0.$$

Z rovnic (18) dostáváme

$$R_o = L, \quad 0 = N.$$

Abychom vyjádřili podmínky pro složky rychlosti, musíme nejdříve rovnice (18) derivovat:

$$\frac{dx}{dt} = -\varkappa \cdot e^{-\varkappa t}[K \sin \omega t + R_o \cos \omega t] + \omega \cdot e^{-\varkappa t}[K \cos \omega t - R_o \sin \omega t],$$

$$\frac{dy}{dt} = -\varkappa e^{-\varkappa t} M \sin \omega t + \omega \cdot e^{-\varkappa t} M \cos \omega t.$$

Pro $t = 0$ je $\dfrac{dx}{dt} = v_{ox} = 0$ a $\dfrac{dy}{dt} = v_o$; z toho tedy vyplývá

$$0 = -\varkappa R_o + \omega K \rightarrow K = \frac{R_o \varkappa}{\omega},$$

$$v_o = \omega M \rightarrow M = \frac{v_o}{\omega}.$$

Řešení tedy je toto:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{R_o}{\omega} \cdot e^{-\varkappa t}(\varkappa \sin \omega t + \omega \cos \omega t) \\ y &= \frac{v_o}{\omega}\, e^{-\varkappa t} \cdot \sin \omega t \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Jsou to dvě parametrické rovnice dráhy, parametrem je čas t. Rovnici dráhy $f(x, y) = 0$ dostaneme eliminací času:

$$\sqrt{R_o^2\omega^2 y^2 + v_o^2 (x - \varkappa y)^2} = R_o \cdot v_o e^{-\frac{\varkappa}{\omega} \operatorname{arccotg} \frac{v_o}{R_o \omega} \cdot \frac{x - \varkappa y}{y}} \qquad (20)$$

Tento vztah je ovšem pro číselné výpočty nevýhodný a použijeme proto raději parametrických rovnic (19).

V tomto obecném řešení musí být obsažen i zvláštní případ pohybu bez odporu, tedy pro $\varkappa = 0$. Dosadíme-li do rovnice (20) $\varkappa = 0$, dostaneme po elementární úpravě vztahu:

$$\frac{y^2}{\frac{v_o^2}{\Omega^2}} + \frac{x^2}{R_o^2} = 1,$$

což je skutečně rovnice elipsy.

Ještě vyřešíme rovnice pro mez aperiodického pohybu. Tu je $\varkappa = \Omega$ a charakteristická rovnice má dvojnásobný kořen.

$$\lambda_{1,2} = -\varkappa.$$

Obecné řešení rovnic (16) a (17) je pak:

$$x = \mathrm{e}^{-\varkappa t}(A + Bt)$$
$$y = \mathrm{e}^{-\varkappa t}(C + Dt).$$

Pro stejné počáteční podmínky jako pro pohyb s malým odporem, t. j. pro $t = 0$, je $x = R_o$, $y = 0$ a $v_x = 0$, $v_y = v_o$ vyplývá:

$$A = R_o,\ C = 0,$$
$$B = R_o\varkappa,\ D = v_o.$$

Pak máme celkové řešení dáno opět parametrickými rovnicemi:

$$x = R_o\mathrm{e}^{-\varkappa t}(1 + \varkappa t) \qquad (21)$$
$$y = v_o t \cdot \mathrm{e}^{-\varkappa t}$$

Po eliminaci času obdržíme rovnici trajektorie:

$$x - \varkappa y = R_o e^{-\frac{R_o\varkappa}{v_o} \cdot \frac{y}{x - \varkappa y}} \qquad (22)$$

Tím jsme dokončili řešení pohybu sférického kyvadla pro lineární zákon odporu $R = 2\varkappa mv$.

Na *obr. 7ab* je znázorněna dráha pro tyto dané hodnoty:

$$\Omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{10}\ \mathrm{1/sec}, \quad \varkappa = 0{,}4\ \mathrm{1/sec}, \quad R_o = 0{,}1\ \mathrm{m};$$

$$v_o = 0{,}1\ \mathrm{m/sec}, \quad \omega = \sqrt{\Omega^2 - \varkappa^2} = \sqrt{9{,}84} = 3{,}137\ \mathrm{1/sec}.$$

Na *obr. 8* je diagram dráhy pro udané hodnoty:

$$\Omega = \sqrt{10}\ \mathrm{1/sec}, \qquad \varkappa = \sqrt{10}\ \mathrm{1/sec},$$
$$R_o = 0{,}1\ \mathrm{m}, \qquad v_o = 0{,}1\ \mathrm{m/sec}.$$

5,0 Sférické kyvadlo v prostředí, které odporuje silou $R = m\beta v^2$

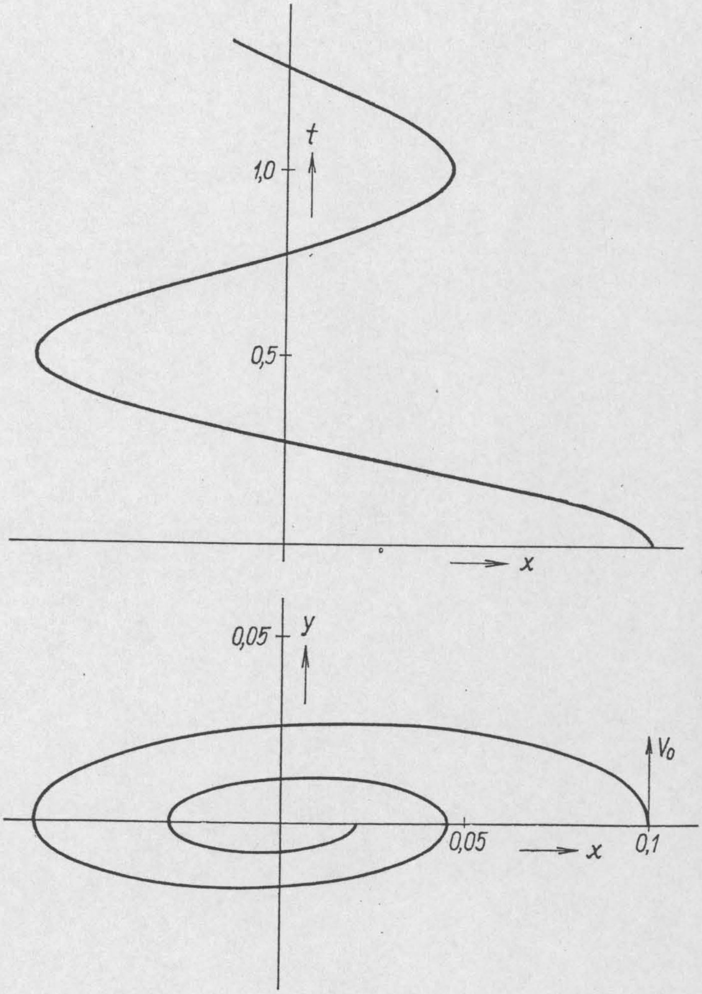
Jeden uzavřený vztah máme, je to zákon udávající změnu momentu rychlosti, tedy rovnice (5). K úplnému řešení potřebujeme ještě jeden integrál. Jak zjistíme použitím buď polárních, nebo pravoúhlých souřadnic, nedá se druhý vztah v uzavřeném tvaru najít. Můžeme však nalézt v pravoúhlých souřadnicích alespoň vztahy, které se podobají vztahům pro centrální pohyby. Abychom toho dosáhli, vycházíme z rovnic (14) a (15), do kterých za R dosadíme uvažovanou kvadratickou závislost odporu. Použitím stejných vzorců pro goniometrické funkce úhlů ψ a α dostaneme:

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{l} \cdot x - \beta v \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a_x$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{l} \cdot y - \beta v \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = a_y.$$

První z obou rovnic vynásobíme $\frac{dy}{dt}$, druhou $-\frac{dx}{dt}$ a rovnice sečteme; výsledkem je vztah:

$$a_x \cdot \frac{dy}{dt} - a_y \frac{dx}{dt} = -\frac{g}{l}\left(x \frac{dy}{dt} - y \cdot \frac{dx}{dt}\right).$$



Obr. 7a.

Výraz na pravé straně v závorce vyjadřuje moment rychlosti v pravoúhlé souřadnicové soustavě. Za něj dosadíme z rovnice (5) a máme potom:

$$a_x \cdot \frac{dy}{dt} - a_y \frac{dx}{dt} = -\frac{g}{l} \cdot Be^{-\beta s}. \tag{23}$$

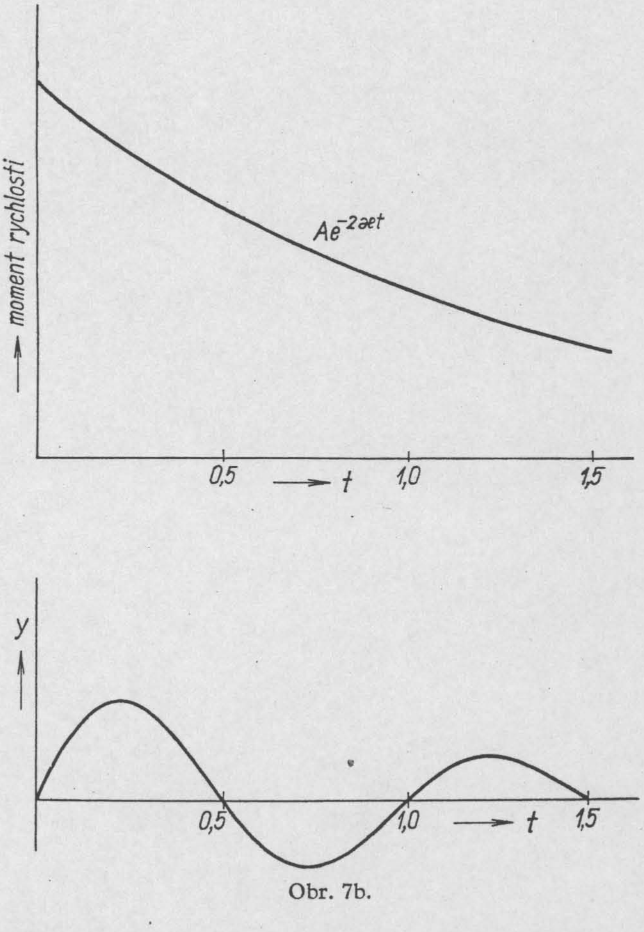
Pro $\beta = 0$ je to jeden ze vztahů pro centrální pohyb.

Pokud nám jde o řešení trajektorie bodu, musíme postupovat jinak. Číselné řešení je velmi pracné a celkem zbytečně přesné. Grafické řešení není proveditelné, protože pro pohyby kyvadla, t. j. pro malé rychlosti, je odporová síla velmi malá, obvykle několik promile centrální síly S; tak malé síly se nedají vůbec graficky znázornit.

Za předpokladu, že součinitel β je velmi malý, použijeme aproximace, a to tím, že hodnoty rychlostí odvodíme z pohybu v ideálním prostředí. Tento pohyb považujeme za první aproximativní řešení. Trajektorie bodu je v tomto prostředí elipsa. Pro tento pohyb napíšeme dvě parametrické rovnice pro složky ve směrech os x a y. Tyto rovnice jsou:

$$x = C_1 \sin \Omega t + C_2 \cos \Omega t, \quad \text{kde} \quad \Omega = \sqrt{\frac{g}{l}},$$

$$y = D_1 \sin \Omega t + D_2 \cos \Omega t.$$



Obr. 7b.

Pro stejné počáteční podmínky dostáváme jako při řešení pro lineární odporovou funkci zmíněné parametrické rovnice:

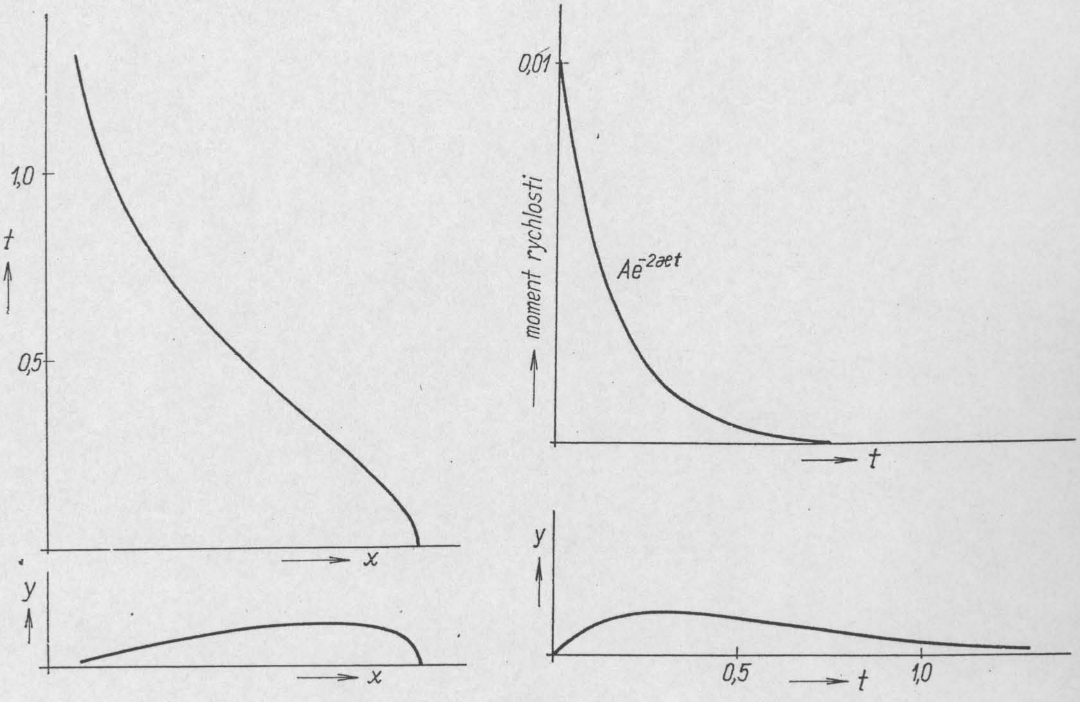
$$x = R_o \cos \Omega t \tag{24}$$

$$y = \frac{v_o}{\Omega} \sin \Omega t. \tag{25}$$

Pro řešení pohybu v odporujícím prostředí použijeme rovnic (14) a (15), do kterých ovšem dosadíme za R:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = - m \frac{g}{l} x - m\beta v^2 \cos \alpha,$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = - m \frac{g}{l} y - m\beta v^2 \sin \alpha.$$



Obr. 8.

Použitím vztahů: $\cos\alpha = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{v}$, $\sin\alpha = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{v}$ a

$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$ obdržíme rovnice v upravené formě:

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\,\Omega^2 x - \beta\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}; \tag{26}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -\,\Omega^2 y - \beta\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}. \tag{27}$$

Z rovnic (24) a (25) dostáváme derivováním vztahy pro složky rychlosti $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ a $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\,R_o\,\Omega\sin\Omega t, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_o\cos\Omega t.$$

Tyto závislosti dosadíme do obecných rovnic (26) a (27), čímž získáme lineární diferenciální rovnice:

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\,\Omega^2 x + \beta R_o\Omega\,\sin\,\Omega t\,\sqrt{R_o^2\,\Omega^2 - (R_o^2\,\Omega^2 - v_o^2)\,\cos^2\,\Omega t}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -\,\Omega^2 y - \beta v_o\cos\Omega t\sqrt{v_o^2 + (R_o^2\,\Omega^2 - v_o^2)\sin^2\Omega t}.$$

Připomeňme si, že v okamžiku, kdy $R_o\Omega = v_o$, jde o pohyb po kruhové dráze, čili o kyvadlo konické. Hořejší rovnice řešíme ve dvou stupních, prvý stupeň je určení obecného integrálu zkrácené homogenní rovnice; druhý stupeň je nalezení partikulárních integrálů. Homogenní část má známé řešení:

$$x = A \sin \Omega t + B \cos \Omega t$$
$$y = C \sin \Omega t + D \cos \Omega t.$$

Partikulární integrály najdeme Lagrangeovou methodou variací konstant. Z první rovnice takto dostaneme dvě rovnice:

$$A' \sin \Omega t + B' \cos \Omega t = \emptyset$$

$$A'\Omega \cos \Omega t - B'\Omega \sin \Omega t = \beta R_o \Omega \sin \Omega t \sqrt{R_o^2 \Omega^2 - (R_o^2 \Omega^2 - v_o^2) \cos^2 \Omega t}.$$

Řešením A' a B' a integrací dostáváme:

$$A = \left\{ \frac{\beta R_o}{3\Omega \, (R_o^2 \Omega^2 - v_o^2)} [R_o^2 \Omega^2 - (R_o^2 \Omega^2 - v_o^2) \cos^2 \Omega t]^{3/2} + C_1 \right\}$$

$$B = - \beta R_o \int_{\emptyset}^{t} \sin^2 \Omega t \sqrt{R_o^2 \Omega^2 - (R_o^2 \Omega^2 - v_o^2) \cos^2 \Omega t} \cdot dt + C_2 .$$

Upravíme integrál pro B: Zavedeme $\Omega t = \varphi$ a dále $\varphi = \frac{\pi}{2} - z$ jako proměnné.

Dostáváme:

$$B = \frac{\beta R_o}{\Omega} \int_{\frac{\pi}{2}}^{z} \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - z \right) \sqrt{u^2 - (u^2 - v_o^2) \cdot \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - z \right)} \cdot dz + C_2,$$

když jsme položili $R_o\Omega = u$.

Dále máme:

$$B = \frac{\beta R_o u}{\Omega} \int_{\frac{\pi}{2}}^{z} \cos^2 z \sqrt{1 - k^2 \sin^2 z} \cdot dz + C_2,$$

kde opět klademe $k^2 = \frac{u^2 - v_o^2}{u^2} < 1$ za předpokladu, že $u > v_o$. Získaný výraz pro B je součet eliptických integrálů. Abychom provedli redukci na základní typy, položme

$$\sin z = \zeta; \quad \cos z \cdot dz = d\zeta.$$

Pak je

$$B = \frac{\beta R_o u}{\Omega} \int_{1}^{\zeta} \sqrt{(1 - \zeta^2)\,(1 - k^2\zeta^2)} \cdot d\zeta + C_2 .$$

Převedením odmocniny do jmenovatele získáme:

$$B = \frac{\beta R_o u}{\Omega} \int_{1}^{\zeta} \frac{(1 - \zeta^2)\,(1 - k^2\zeta^2)}{\sqrt{(1 - \zeta^2)\,(1 - k^2\zeta^2)}} \, d\zeta + C_2,$$

a rozvedením podle činitelů v čitateli

$$B = \beta R_o^2 \left\{ \int_1^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} - (1+k^2) \int_1^{\zeta} \frac{\zeta^2 \cdot d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} + \right.$$

$$\left. + k^2 \int_1^{\zeta} \frac{\zeta^4 \cdot d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} \right\} + C_2 .$$

Místo integrálu s mezemi $\int_1^{\zeta}$ píšeme $\int_1^{\zeta} = \int_1^{0} + \int_0^{\zeta}$, což dává $\int_1^{\zeta} = \int_0^{\zeta} - \int_0^{1}$.

Tím máme:

$$B = \beta R_o^2 \left\{ \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} - \int_0^{1} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} - \right.$$

$$- (1+k^2) \int_0^{\zeta} \frac{\zeta^2 \cdot d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} + (1+k^2) \int_0^{1} \frac{\zeta^2 \cdot d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} +$$

$$\left. + k^2 \int_0^{\zeta} \frac{\zeta^4 d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} - k^2 \int_0^{1} \frac{\zeta^4 \cdot d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} \right\} + C_2 .$$

Poslední dva integrály musíme ještě dále redukovat na základní typy a dosadíme-li pro eliptické integrály označení:

$$F(k, \zeta) = \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} ; \quad E(k, \zeta) = \int_0^{\zeta} \sqrt{\frac{1-k^2\zeta^2}{1-\zeta^2}} \cdot d\zeta ;$$

$$K = \int_0^{1} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} ; \quad E = \int_0^{1} \sqrt{\frac{1-k^2\zeta^2}{1-\zeta^2}} \cdot d\zeta ,$$

bude mít upravený výraz tvar:

$$B = \beta R_o^2 \left\{ F(k, \zeta) - K(k, 1) - \frac{(1+k^2)}{k^2} F(k, \zeta) + \frac{(1+k^2)}{k^2} E(k, \zeta) + \right.$$

$$+ \frac{(1+k^2)}{k^2} \left(K - E \right) + \frac{\zeta\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}{3} +$$

$$+ \frac{2(1+k^2)}{3k^2} \left[F(k, \zeta) - E(k, \zeta) \right] - \frac{1}{3} F(k, \zeta) - \frac{2(1+k^2)}{3k^2} \left(K - E \right) +$$

$$\left. + \frac{1}{3} K \right\} + C_2 .$$

Po sloučení dostaneme konečně:

$$B = \beta R_o^2 \left\{ \frac{k^2 - 1}{3\,k^2} F(k, \zeta) + \frac{1 + k^2}{3\,k^2} E(k, \zeta) + \frac{\zeta \sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2\zeta^2)}}{3} + \right.$$

$$\left. + \frac{1 - k^2}{3\,k^2} K - \frac{1 + k^2}{3\,k^2} E \right\} + C_2 .$$

Řešení pro souřadnici x dostáváme ve tvaru:

$$x = \left\{ \frac{\beta R_o}{3\,\Omega\,(u^2 - v_o^2)} [u^2 - (u^2 - v_o^2) \cos^2 \Omega t]^{\frac{3}{2}} + C_1 \right\} \cdot \sin \Omega t +$$

$$+ \left(\beta R_o^2 \left\{ - \frac{1 - k^2}{3\,k^2} F(k, \zeta) + \frac{1 + k^2}{3\,k^2} E(k, \zeta) + \frac{\zeta \sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2\zeta^2)}}{3} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1 - k^2}{3\,k^2} K - \frac{1 + k^2}{3\,k^2} E \right\} + C_2 \right) \cdot \cos \Omega t \tag{28}$$

Připomeňme ještě transformační rovnici pro ζ:

$$\zeta = \cos \Omega t \tag{29}$$

Pro souřadnici y dostaneme variací konstant dvě rovnice:

$$C' \sin \Omega t + D' \cos \Omega t = \emptyset$$

$$C'\,\Omega \cos \Omega t - D'\,\Omega \sin \Omega t = - \beta v_o \cos \Omega t \sqrt{R_o^2\,\Omega^2 - (R_o^2\,\Omega^2 - v_o^2) \cos^2 \Omega t}.$$

Řešením a integrací dostaneme:

$$C = - \frac{\beta v_o}{\Omega} \int_0^t \cos^2 \Omega t \sqrt{u^2 - (u^2 - v_o^2) \cos^2 \Omega\,t} \cdot dt + C_3 ,$$

$$D = \frac{\beta v_o}{3\,\Omega^2\,(u^2 - v_o^2)} [u^2 - (u^2 - v_o^2) \cos^2 \Omega t]^{\frac{3}{2}} + C_4 .$$

Vztah pro C převedeme obdobnými substitucemi jako u B na integrál:

$$C = \frac{\beta v_o u}{\Omega^2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{z} \sin^2 z \sqrt{1 - k^2 \sin^2 z} \cdot dz + C_3, \text{ kde opět}$$

$$k^2 = \frac{u^2 - v_o^2}{u^2} .$$

Substitucí $\sin z = \zeta$, $\cos z \cdot dz = d\zeta$ převedeme hořejší eliptický integrál na tvar

$$C = \frac{\beta v_o R_o}{\Omega} \int_1^{\zeta} \frac{\zeta^2 - k^2 \zeta^4}{\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2\zeta^2)}} d\zeta + C_3.$$

Rozvedeme podle činitelů v čitateli a obdržíme:

$$C = \frac{\beta v_o R_o}{\Omega} \left[\int_1^{\zeta} \frac{\zeta \cdot d\zeta}{\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2\zeta^2)}} - k^2 \int_1^{\zeta} \frac{\zeta^4}{\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2\zeta^2)}} \cdot d\zeta \right] + C_3 ,$$

$$C = \frac{\beta v_o R_o}{\Omega} \left[\int_0^{\zeta} \frac{\zeta^2 \cdot d\zeta}{\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2\zeta^2)}} - \int_0^{1} \frac{\zeta^2 \cdot d\zeta}{\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2\zeta^2)}} - \right.$$

$$- k^2 \int_0^\zeta \frac{\zeta^4}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}\, d\zeta + k^2 \int_0^1 \frac{\zeta^4}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} \cdot d\zeta \Bigg] + C_3 .$$

$$C = \frac{\beta v_o R_o}{\Omega} \left[\frac{1}{k^2} \left(F(k, \zeta) - E(k, \zeta) - \frac{1}{k^2} \left(K - E \right) - \frac{\zeta \sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}{3} - \right.\right.$$

$$- \frac{2(1+k^2)}{3k^2} \left(F(k,\zeta) - E(k,\zeta) + \frac{1}{3} F(k,\zeta) + \right.$$

$$\left. + \frac{2(1+k^2)}{3k^2} \left(K - E \right) - \frac{1}{3} K \right] + C_3 .$$

Po zjednodušení konečně dostaneme

$$C = \frac{\beta v_o R_o}{\Omega} \left[\frac{1-k^2}{3k^2} F(k,\zeta) + \frac{2k^2-1}{3k^2} E(k,\zeta) - \frac{\zeta \sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}{3} - \right.$$

$$\left. - \frac{1-k^2}{3k^2} K - \frac{2k^2-1}{3k^2} E \right] + C_3 .$$

Máme tedy pro souřadnici y bodu konečné řešení:

$$y = \left\{ \frac{\beta v_o R_o}{\Omega} \left[\frac{1-k^2}{3k^2} F(k,\zeta) + \frac{2k^2-1}{3k^2} E(k,\zeta) - \frac{\zeta \sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}{3} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1-k^2}{3k^2} K - \frac{2k^2-1}{3k^2} E \right] + C_3 \right\} \cdot \sin \Omega t +$$

$$+ \left\{ \frac{\beta v_o}{3\Omega^2 (u^2 - v_o^2)} \left[u^2 - (u^2 - v_0^2) \cos^2 \Omega t \right]^{3/2} + C_4 \right\} \cos \Omega t. \tag{30}$$

Tím jsme odvodili parametrické rovnice pro pohyb v prostředí, jehož odpor roste s druhou mocninou rychlosti, pro malé hodnoty součinitele β. Pokud jde o určení čtyř integračních konstant, určíme je ze známých nám počátečních podmínek, a to pro $t = 0$ je $x = R_o$, $y = 0$, $\frac{dx}{dt} = 0$, $\frac{dy}{dt} = v_o$.

Dostáváme:

$$R_o = C_2$$

$$0 = \frac{\beta v_o^4}{3\Omega^2 (u^2 - v_o^2)} + C_4 .$$

Odtud

$$C_4 = - \frac{\beta v_o^4}{3\Omega^2 (u^2 - v_o^2)} .$$

Pro splnění dalších podmínek musíme určit vztahy pro složky rychlosti a dosadit podmínky:

$$\frac{dx}{dt} = 0 = \Omega \left[\frac{\beta R_o v_o^3}{3\Omega (u^2 - v_o^2)} + C_1 \right]$$

odtud je

$$C_1 = - \frac{\beta R_o v_o^3}{3\Omega (u^2 - v_o^2)} ;$$

$$\frac{dy}{dt} = v_o = C_3 \cdot \Omega \rightarrow C_3 = \frac{v_o}{\Omega} .$$

Po dosazení do rovnic (28) a (30) máme partikulární řešení úlohy.

$$x = \frac{\beta R_o}{3\,\Omega\,(u^2 - v_o^2)} \left\{ [u^2 - (u^2 - v_o^2)\cos^2 \Omega t]^{3/2} - v_o^3 \right\} \cdot \sin \Omega t +$$

$$+ \left(\beta R_o^2 \left\{ - \frac{1 - k^2}{3\,k^2} F(k, \zeta) + \frac{1 + k^2}{3\,k^2} E(k, \zeta) + \frac{\zeta \sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2\zeta^2)}}{3} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1 - k^2}{3\,k^2} K - \frac{1 + k^2}{3\,k^2} E \right\} + R_o \right) \cdot \cos \Omega t\,,$$

$$y = \frac{v_o}{\Omega} \left\{ \beta R_o \left[\frac{1 - k^2}{3\,k^2} F(k, \zeta) + \frac{2\,k^2 - 1}{3\,k^2} E(k, \zeta) - \frac{\zeta \sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2\zeta^2)}}{3} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1 - k^2}{3\,k^2} K - \frac{2\,k^2 - 1}{3\,k^2} E \right] + 1 \right\} \cdot \sin \Omega t +$$

$$+ \frac{\beta v_o}{3\,\Omega^2 (u^2 - v_o^2)} \left\{ [u^2 - (u^2 - v_o^2)\cos^2 \Omega t]^{3/2} - v_o^3 \right\} \cdot \cos \Omega t\,.$$

Tím je skončeno vyšetřování trajektorie bodu sférického kyvadla a ještě zbývá úkol stanovit dobu kyvu, t. j. dobu oběhu po trajektorii. Dosud jsme postupovali tak, že jsme dobu uvažovali aproximativně nezměněnou jako při pohybu v ideálním prostředí. Jak uvidíme dále (konické kyvadlo), je deformace dráhy způsobená odporem v běžných případech tak nepatrná, že pokles momentu rychlosti (rovnice 5) je velmi malý a můžeme proto aproximativně považovat dobu kyvu za nezměněnou.

Jako zvláštní případ vyřešíme rovnice pohybu pro kyvadlo, které na počátku vyhovují podmínce konického kyvadla, t. j. $R_o \Omega = v_o$. Máme pak pohybové rovnice:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = - \Omega^2 x + \beta R_o^2\, \Omega^2 \sin \Omega t$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = - \Omega^2 y - \beta v_o^2 \cos \Omega t.$$

Jejich řešení je:

$$x = \left(\frac{\beta R_o^2}{2} \sin^2 \Omega t + C_1 \right) \sin \Omega t + \left[\beta R_o^2 \left(\frac{1}{4} \sin 2\,\Omega t - \frac{\Omega t}{2} \right) + C_2 \right] \cdot \cos \Omega t\,; \qquad (31)$$

$$y = \left[- \frac{\beta v_o^2}{\Omega^2} \left(\frac{\Omega t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\,\Omega t \right) + C_3 \right] \sin\, \Omega t + \left(\frac{\beta v_o^2}{2\,\Omega^2} \sin^2 \Omega t + C_4 \right) \cos \Omega t\,. \qquad (32)$$

Integrační konstanty $C_1 \div C_4$ se určují z počátečních podmínek: pro $t = 0$ je $x = R_o$ a $y = \emptyset$, kromě toho $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$ a $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_o$.

První dvě podmínky dávají:

$$R_o = C_2,$$
$$0 = C_4;$$

podmínky pro rychlost dávají:

$$0 = C_1 \Omega \to C_1 = \emptyset$$

$$v_o = C_3 \Omega \to C_3 = \frac{v_o}{\Omega}\,.$$

Partikulární integrály pro uvažované počáteční podmínky jsou:

$$x = R_o \cdot \cos \Omega t + \beta R_o^2 \left(\frac{1}{4} \sin 2\, \Omega t - \frac{\Omega t}{2} \right) \cdot \cos \Omega t + \frac{\beta R_o^2}{2} \cdot \sin^3 \Omega t,$$

$$y = \frac{v_o}{\Omega} \sin \Omega t - \frac{\beta v_o^2}{\Omega^2} \left(\frac{\Omega t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\, \Omega t \right) \sin \Omega t + \frac{\beta v_o^2}{2\, \Omega^2} . \sin^2 \Omega t \cdot \cos \Omega t.$$

Prvními členy v rovnicích je dán pohyb v ideálním prostředí, ostatními členy je vyjádřen vliv odporu prostředí. Pro jeden kyv, t. j. pro $\Omega t = 2\pi$, dostáváme následující x-ovou výchylku na stejnou stranu:

$$x_{2\pi} = R_o - \pi \beta R_o^2 = R_o (1 - \pi \beta R_o) = R_1 \qquad (33)$$

Použitá literatura

Föppl, A.: Die wichtigsten Lehren der höheren Dynamik. Berlin 1943.
Petr, K.: Počet integrální. Praha 1931.